DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

I LIMITI

Achille raggiungerà la tartaruga?

TOPOLOGIA DELLA RETTA

Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali R e i punti di una retta orientata (retta reale). Pertanto, *identifichiamo ogni insieme numerico di R con un sottoinsieme di punti della retta*.

◆ GLI INTERVALLI

Un **intervallo** è un sottoinsieme di numeri reali che corrisponde a una semiretta (intervallo illimitato) o a un segmento (intervallo limitato) della retta reale.

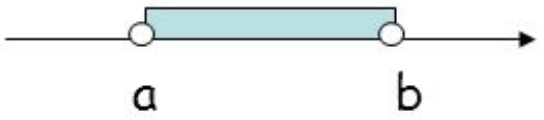
INTERVALLI LIMITATI

Definizione 1

Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiama:

INTERVALLO APERTO (a, b)

l'insieme dei numeri reali x tali che $a < x < b$

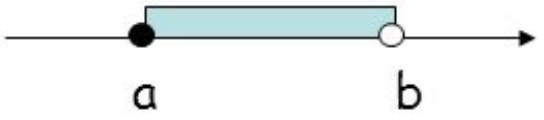


INTERVALLO CHIUSO $[a, b]$

l'insieme dei numeri reali x tali che $a \leq x \leq b$

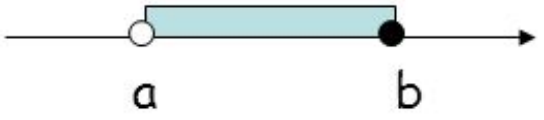
INTERVALLO APERTO A DESTRA $[a, b)$

l'insieme dei numeri reali x tali che $a \leq x < b$



INTERVALLO APERTO A SINISTRA $(a, b]$

l'insieme dei numeri reali x tali che $a < x \leq b$



INTERVALLI ILLIMITATI

Definizione 2

Dato un numero reale a qualsiasi, si chiama:

INTERVALLO ILLIMITATO SUPERIORMENTE

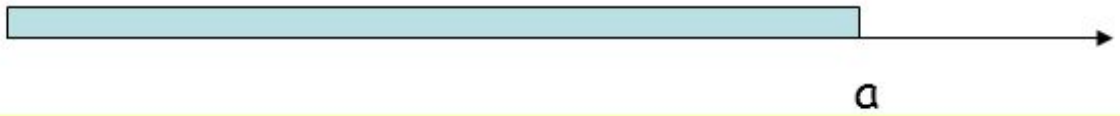
l'insieme dei numeri reali x tali che $x \geq a$

$[a, +\infty)$

INTERVALLO ILLIMITATO INFERIORMENTE

l'insieme dei numeri reali x tali che $x \leq a$

$(-\infty, a]$



Osservazione

- *Un intervallo limitato è in corrispondenza con i punti di un segmento*
- *Un intervallo illimitato è in corrispondenza con i punti di una semiretta*
- *L'intervallo* $(-\infty, +\infty)$ *è in corrispondenza con i punti di una retta e rappresenta l'insieme dei numeri Reali*

◆ INSIEMI LIMITATI E ILLIMITATI

Le proprietà di essere limitato o illimitato si possono attribuire anche a qualunque insieme numerico.

Un **insieme A** è detto **superiormente limitato** se:

$$\exists \alpha \in R : x \leq \alpha \ \forall x \in A$$

si legge: è possibile determinare un numero reale **α**, chiamato **maggiorante di A**, non necessariamente appartenente all'insieme A, tale che x sia minore o uguale ad α per ogni x appartenente ad A.

Un **insieme A** è detto **inferiormente limitato** se:

$$\exists \beta \in R : x \geq \alpha \ \forall x \in A$$

si legge: è possibile determinare un numero reale β, chiamato **minorante di A**, non necessariamente appartenente all'insieme A, tale che x sia maggiore o uguale a β per ogni x appartenente ad A.

Un **insieme A** è detto **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se esiste un intervallo limitato che lo contiene:

$$\exists \gamma (> 0) \in R : |x| \leq \gamma \ \forall x \in A$$

esempio

Consideriamo l'insieme $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{2n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$. I suoi elementi sono i numeri:

$$0, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \ldots$$

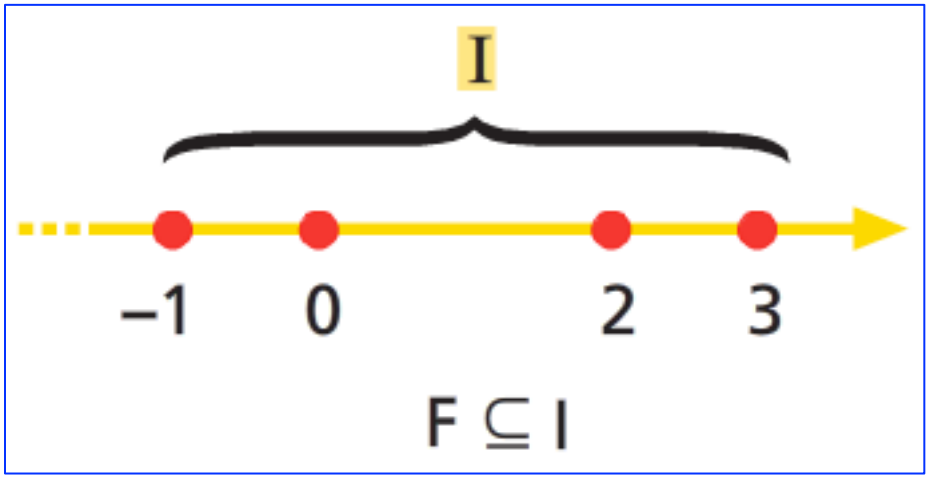
Si può dimostrare che tutti gli elementi di A sono minori di 2, quindi 2 è un maggiorante di A e tale insieme è superiormente limitato. Inoltre tutti gli elementi di A sono maggiori o uguali a 0, per cui A è anche inferiormente limitato perché 0 è un suo minorante.
Allora possiamo dire che A è limitato, infatti esso è contenuto nell'intervallo limitato $[0; 2]$.

- La disuguaglianza $\frac{2n}{n+1} < 2$ è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$.

- A, pur essendo limitato, è un insieme infinito.

esempio

L'insieme $F = \{-1, 0, 2, 3\}$ è contenuto nell'intervallo chiuso $I = [-1; 3]$ e quindi è limitato. -1 è un minorante di F e 3 è un suo maggiorante.
In generale, gli insiemi finiti sono sempre limitati perché, come abbiamo già osservato, essi sono sempre contenuti in qualche intervallo limitato.



Un **insieme A** è detto **illimitato superiormente** se:

$$\forall m \in R \; \exists x \in A : x > m$$

si legge: se, scelto arbitrariamente un numero reale m, è possibile trovare qualche elemento x dell'insieme A maggiore di m.

esempio

L'insieme dei numeri pari è un insieme non limitato superiormente, ossia è un **insieme illimitato superiormente**.

Un **insieme A** è detto **illimitato inferiormente** se:

$$\forall m \in R \ \exists x \in A : x < m$$

si legge: se, scelto arbitrariamente un numero reale m, è possibile trovare qualche elemento x dell'insieme A minore di m.

esempio

L'insieme dei numeri razionali minore di 3 è un insieme non limitato inferiormente, ossia è un **insieme illimitato inferiormente**.

Un **insieme A** è detto **illimitato** se è illimitato superiormente e inferiormente.

◆ ESTREMI DI UN INSIEME

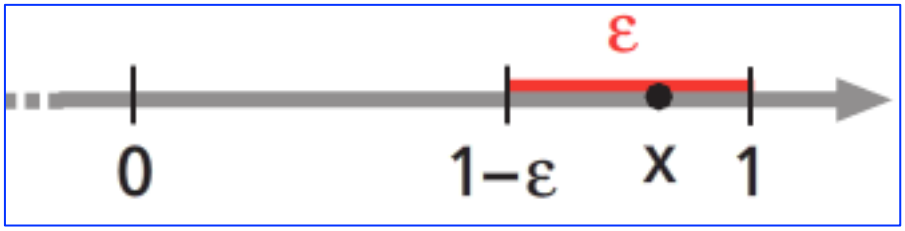
Problema – **Confrontare gli elementi dell'insieme E:**

$$E = \left\{ x \mid x = 1 - \frac{1}{n^2} \ con \ n \in N - \{0\} \right\}$$

con il numero 1. Quale proprietà gode il numero 1?

Tutti i numeri che formano l'insieme E sono minori di 1:

$$x < 1 \ \forall x \in E, \ cioè \ \forall n \in N - \{0\}$$



Scegliamo arbitrariamente un numero reale positivo **ε** e cerchiamo se ci sono elementi di E maggiori di (1-**ε**).

Ossia, vogliamo stabilire se la disequazione:

$$x > 1 - \varepsilon \quad con \;\; x \in E$$

ammette soluzioni in E.

Sostituiamo a x la sua espressione e risolviamo la disequazione:

$$1 - \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon \xrightarrow{\substack{calcoli \\ algebrici}} \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$$

Poiché n ed ε sono numeri positivi, la soluzione è:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Tutti gli elementi x di E calcolati scegliendo $n>1/\sqrt{\varepsilon}$ risolvono la disequazione.

Ciò vuol dire che: ogni volta che scegliamo un numero positivo ε è possibile trovare numeri dell'insieme E maggiori di (1-ε).

In definitiva, il numero 1 ha una particolare proprietà che riassumiamo dicendo che **1 è un estremo superiore di E**.

definizione – Dato un insieme E superiormente limitato, si dice estremo superiore di E ($\sup_E$) quel numero reale M, se esiste, tale che:

- $x \leq M \quad \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in E : x > (M - \varepsilon)$

- M è un maggiorante di E
- M è il più piccolo maggiorante di E

Se un insieme è illimitato superiormente, il suo estremo superiore è $+\infty$.

L'estremo superiore può appartenere o non appartenere all'insieme. Nel caso appartenga si chiama **massimo** ($\max_E$).

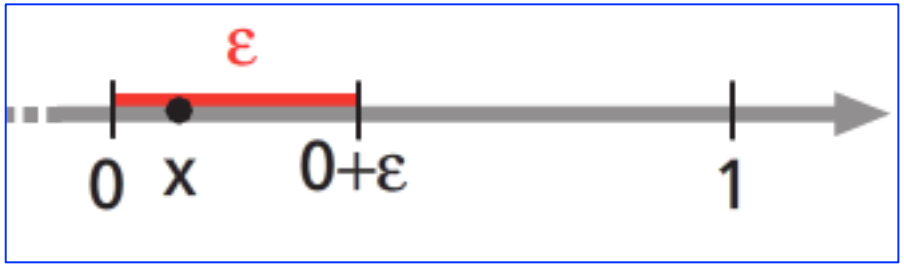
Ritorniamo al nostro problema e osserviamo che tutti i numeri di E:

$$E = \left\{ x \mid x = 1 - \frac{1}{n^2} \ con \ n \in N - \{0\} \right\}$$

sono maggiori 0:

$$x > 0 \ \forall x \in E, \ cioè \ \forall n \in N - \{0\}$$

Scegliamo arbitrariamente un numero reale positivo **ε** e cerchiamo se ci sono elementi di E minori di (0+**ε**).



Ossia, vogliamo stabilire se la disequazione:

$$x < 0 + \varepsilon \quad con \;\; x \in E$$

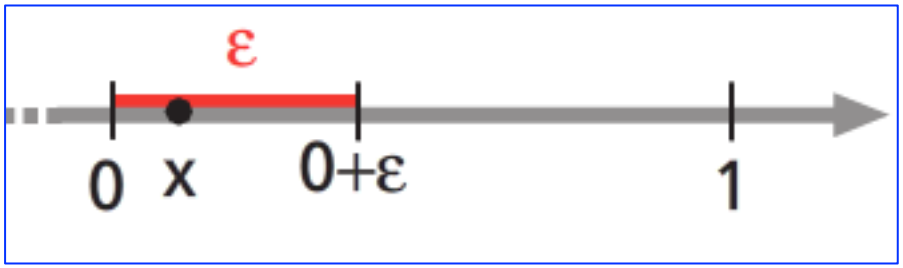
ammette soluzioni in E.

Sostituiamo a x la sua espressione e risolviamo la disequazione:

$$1 - \frac{1}{n^2} < 0 + \varepsilon \xrightarrow{\substack{calcoli \\ algebrici}} \frac{1}{n^2} > 1 - \varepsilon$$

La disequazione è soddisfatta per qualunque valore di **ε**.

Ossia: ogni volta che scegliamo un numero positivo **ε**, troviamo almeno un numero di E minore di (0+**ε**).



Se la condizione posta è verificata, "vicino" a 0 quanto si vuole c'è almeno un elemento di E non minore di 0.

In definitiva, il numero 0 ha una particolare proprietà che riassumiamo dicendo che **0 è un estremo inferiore di E**.

definizione – Dato un insieme E inferiormente limitato, si dice estremo inferiore di E (inf_E) quel numero reale L, se esiste, tale che:

- $x \geq L \quad \forall x \in E$
- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in E : x < (L + \varepsilon)$

- L è un minorante di E
- M è il più grande minorante di E

Se un insieme è illimitato inferiormente, il suo estremo inferiore è -∞.

L'estremo inferiore può appartenere o non appartenere all'insieme. Nel caso appartenga si chiama **minimo** (min_E).

proprietà - Unicità degli estremi superiore e inferiore

L'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme totalmente ordinato, se esistono, sono unici.

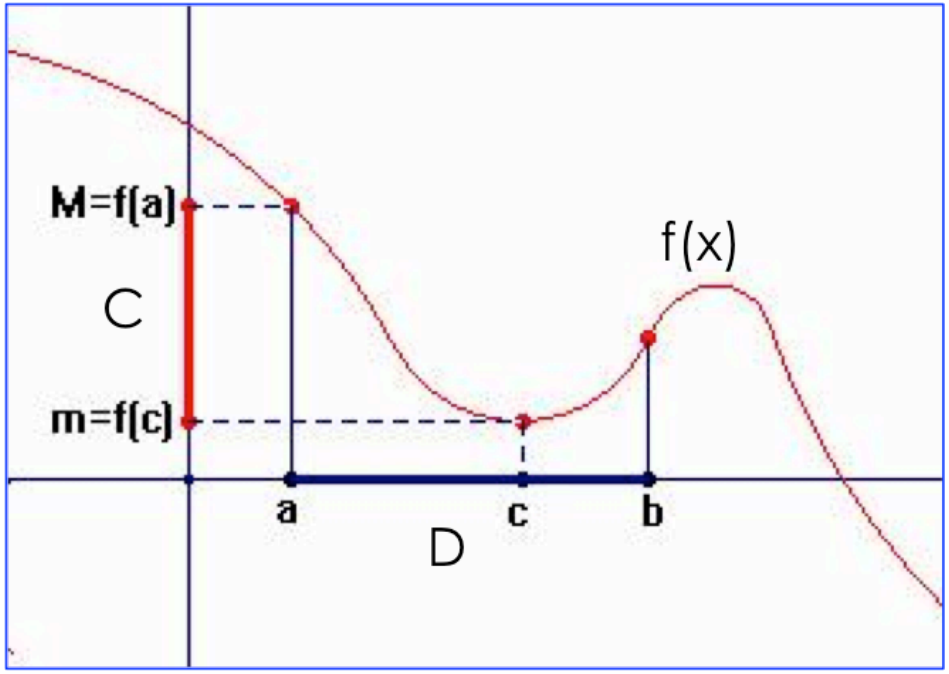
proprietà – Completezza dell'insieme R

Ogni sottoinsieme di numeri reali limitato superiormente (inferiormente) ammette estremo superiore (inferiore).

La seconda proprietà non si verifica per altri insiemi numerici. Per esempio, l'insieme dei numeri razionali positivi il cui quadrato è minore di 2 non ha estremo superiore in Q. Infatti, il suo estremo superiore è $\sqrt{2}$, che è un numero irrazionale, quindi non appartenente a Q.

osservazione

Chiamiamo estremo inferiore ed estremo superiore di una funzione f(x), l'estremo inferiore e superiore del suo codominio C relativo al dominio D considerato.



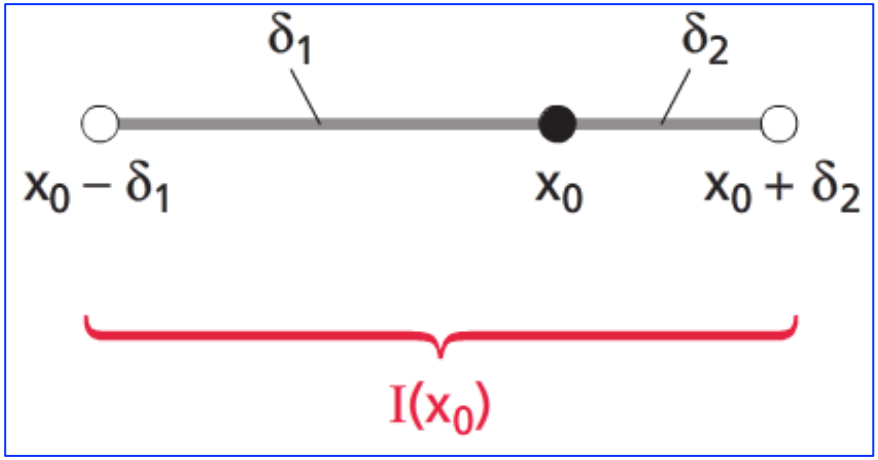
In modo analogo si parla di massimo e minimo della funzione.

◆ INTORNI DI UN PUNTO

definizione – Dato un numero reale x_0, si chiama **intorno completo** di x_0 un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0:

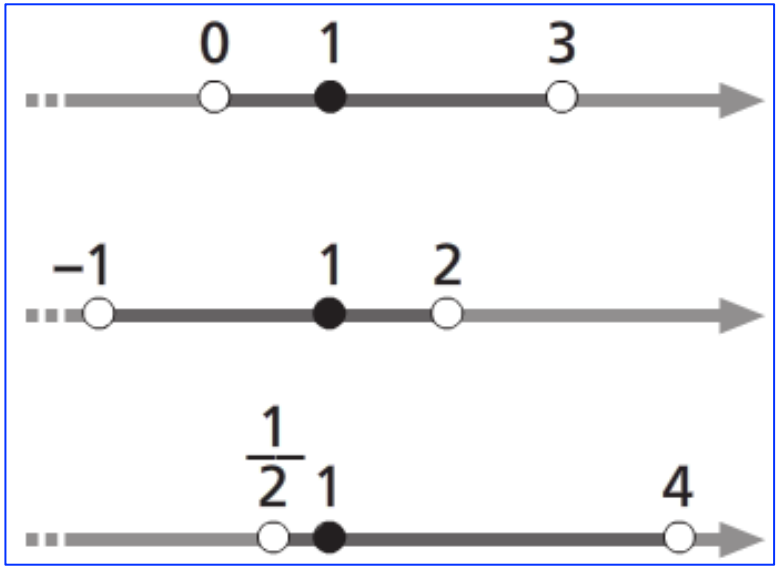
$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$$

$$con\ (\delta_1, \delta_2)\ reali\ e\ positivi$$



esempio

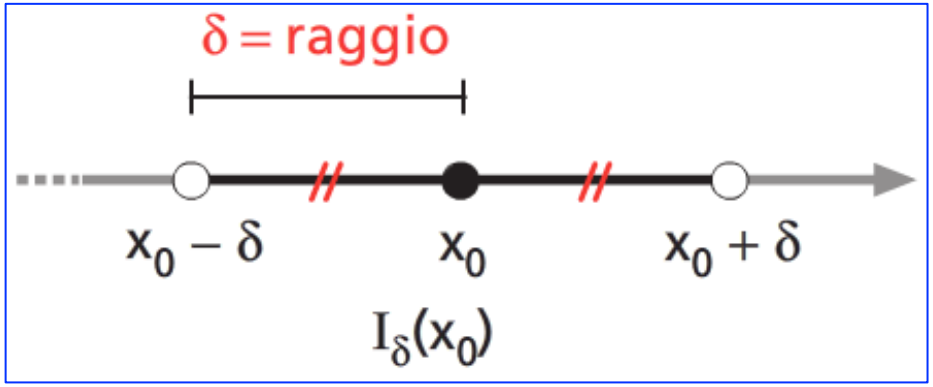
Se x_0=1, gli intervalli aperti I_1=]0;3[; I_2=]-1;2[; I_3=]1/2;4[sono tutti intorni completi di 1.



Quando $\delta_1 = \delta_2$, il punto x_0 è il punto medio dell'intervallo e si parla di intorno circolare di x_0.

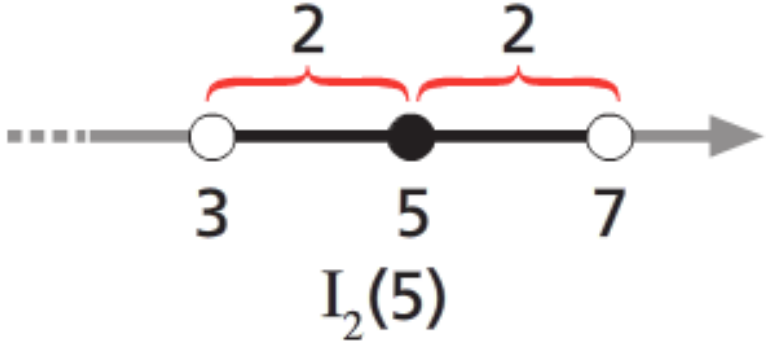
definizione – Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, si chiama **intorno circolare** di x_0, di raggio δ, l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ:

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$$



esempio

Se $x_0=5$, l'intervallo aperto $I_2(5)=]3;7[$ è un suo intorno circolare.



Poiché l'intorno circolare $I_\delta(x_0)$ è formato dall'insieme di punti $x \in R$, lo possiamo scrivere come:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta$$

quindi:

$$I_\delta(x_0) = \left\{ x \in \Re : |x - x_0| < \delta \right\}$$

proprietà

L'intersezione e l'unione di due o più intorni (completi o circolari) di x_0 sono ancora degli intorni di x_0.

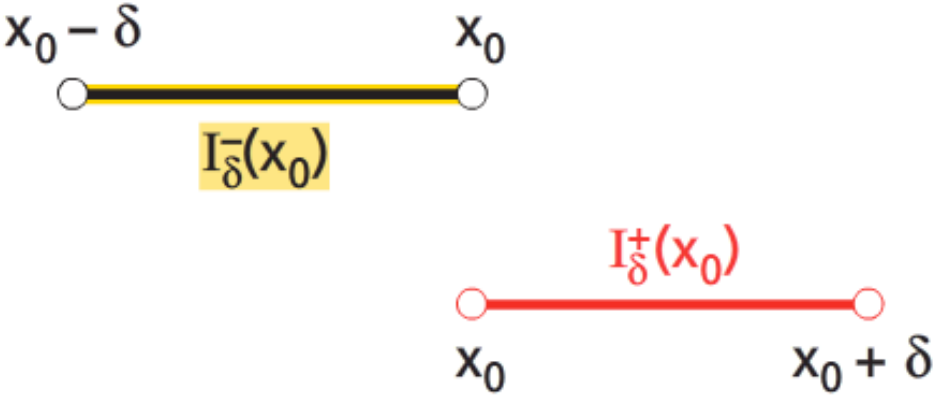
Dato un intorno di un punto x_0, spesso conviene considerare soltanto la parte dell'intorno che sta a destra o a sinistra di x_0. Quindi parliamo di:

intorno destro di x_0

$$I_\delta^+(x_0) =]x_0; x_0 + \delta[$$

intorno sinistro di x_0

$$I_\delta^-(x_0) =]x_0 - \delta; x_0[$$



intorno sinistro di x_0

intorno destro di x_0

esempio

L'intervallo]2;2+δ[è un intorno destro del punto 2, mentre l'intervallo]2-δ;2[è un intorno sinistro.

◆ INTORNI DI INFINITO

Dati (a,b)εR, con a<b, definiamo:

intorno di -∞ un qualsiasi intervallo illimitato inferiormente:

$$I(-\infty) =]-\infty; a[= \{x \in \Re : x < a\}$$

intorno di +∞ un qualsiasi intervallo illimitato superiormente:

$$I(+\infty) =]b; +\infty[= \{x \in \Re : x > b\}$$

intorno circolare di ∞

$$I(\infty) =]-\infty; -c[\cup]c; +\infty[\quad con\ c > 0$$

esempio

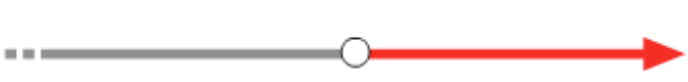
1. Le soluzioni della disequazione lineare $3x - 9 > 0$ costituiscono un intorno di $+\infty$. Infatti sono tutti i numeri reali x tali che $x > 3$, cioè $I(+\infty) =]3; +\infty[$.

2. Le soluzioni della disequazione di secondo grado $x^2 + 2x - 3 > 0$ sono $x < -3 \vee x > 1$; quindi corrispondono all'intorno di infinito:

$$I(\infty) =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[.$$

3. L'insieme dei numeri reali x tali che $|x| > 4$ è un intorno circolare di ∞:

$$I_4(\infty) =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[.$$



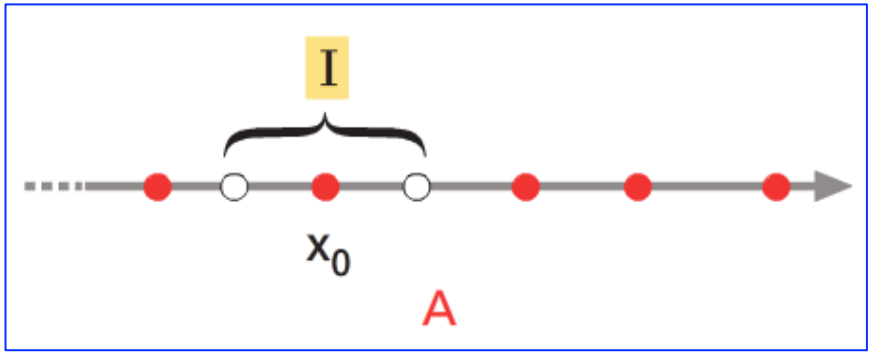
$I(+\infty) =]3; +\infty[$

$I_4(\infty)$

$I(\infty) =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$

◆ PUNTI ISOLATI

definizione – Sia x_0 un numero reale appartenente a un sottoinsieme A di R. Si dice che x_0 è un **punto isolato** di A se esiste almeno un intorno I di x_0 che non contiene altri elementi di A, diversi da x_0.



Per verificare che un punto di un insieme è isolato basta determinare un solo intorno di quel punto che non contenga altri punti dell'insieme stesso.

esempio

Consideriamo l'insieme $A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}, n \in \mathbb{N}$.

Rappresentiamo l'insieme A sulla retta orientata e consideriamo il suo punto 0. Osserviamo che è possibile determinare un intorno di 0 che non contenga altri elementi di A, per esempio $\left]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right[$. Allora 0 è un punto isolato di A.

Nello stesso modo è possibile dimostrare che tutti gli elementi dell'insieme A sono punti isolati: per esempio, per ½ si può prendere l'intorno circolare di raggio 1/8.

esempio

Osservazione: se un insieme contiene un numero finito di punti, questi sono tutti punti isolati.

L'insieme A={-2;0;1/2;4} è formato da quattro punti tutti isolati.

Osservazione: anche un insieme di infiniti punti può essere costituito di punti tutti isolati.

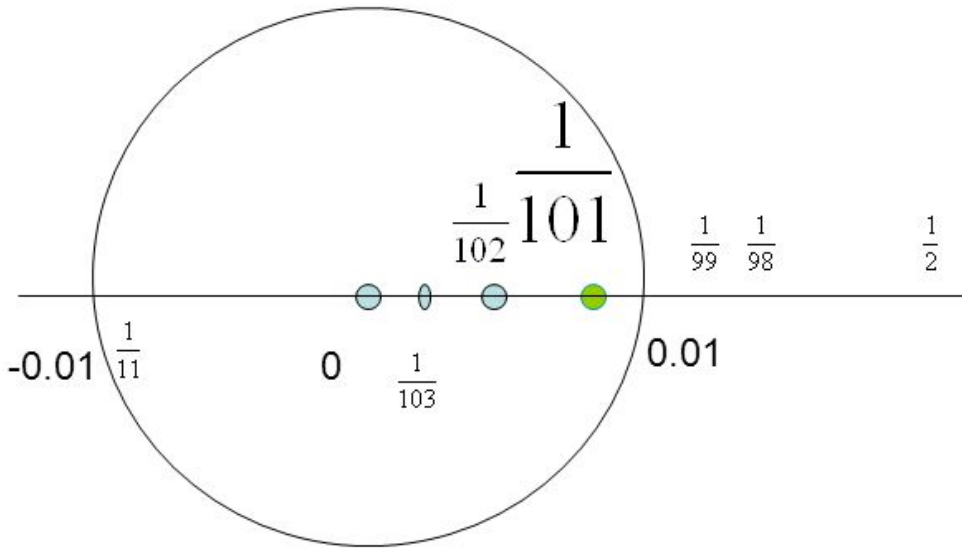
L'insieme dei numeri naturali N è costituito tutto di punti isolati: basta prendere per ciascun punto il suo intorno circolare di raggio ½ e osservare che non contiene altri numeri naturali.

◆ PUNTI DI ACCUMULAZIONE

definizione – Si dice che il numero reale x_0 è un punto di accumulazione di A, sottoinsieme di R, se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

Il termine accumulazione indica che i punti di A si accumulano, si addensano intorno al punto x_0.

$\delta = 0{,}01$ da n=101 in poi si ha



Il punto 0 è un punto di accumulazione in quanto da n=101 in poi tutti gli elementi di A si addensano nell'intorno di 0.

esempio

Consideriamo di nuovo l'insieme:

$$A = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots, \frac{n}{n+1}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

All'aumentare di n, i corrispondenti valori di A si avvicinano al valore 1, come si può osservare nella tabella seguente.

n	10	100	1000	10 000	…
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{10}{11} = 0,\overline{90}$	$\frac{100}{101} = 0,\overline{9900}$	$\frac{1000}{1001} = 0,\overline{999000}$	$\frac{10\,000}{10\,001} = 0,\overline{99990000}$	…

È possibile verificare che il punto 1 gode della seguente proprietà: comunque scegliamo un intorno completo di 1 (anche di raggio molto piccolo), questo contiene infiniti elementi di A. Quindi 1 è un punto di accumulazione di A.

Per esempio, l'intorno $]0{,}9;\ 1{,}1[$ del punto 1 contiene infiniti punti di A:

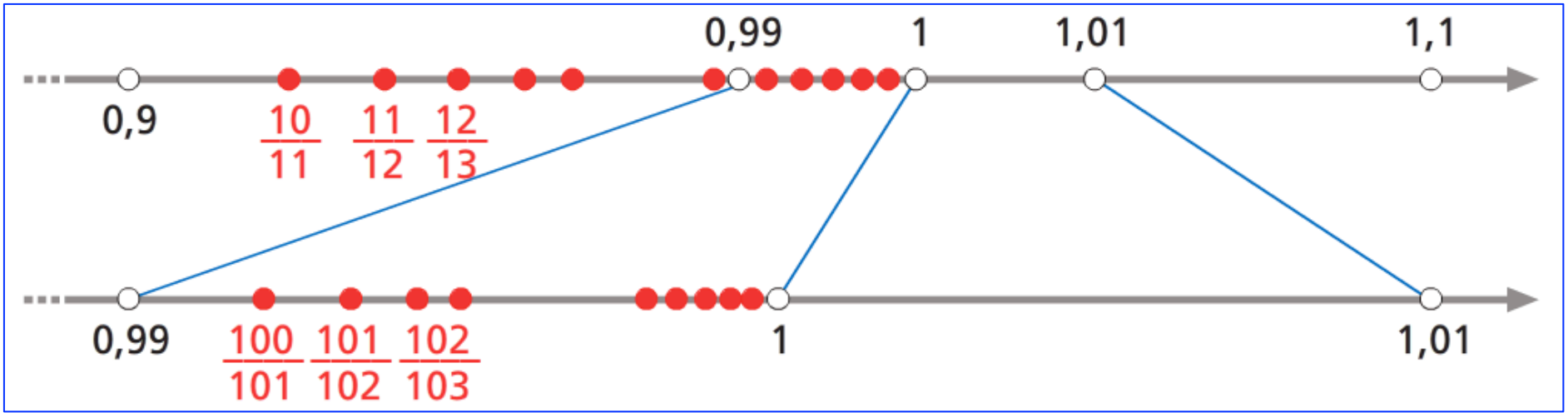
$$\frac{10}{11},\ \frac{11}{12},\ \frac{12}{13},\ \dots$$

L'intorno $]0{,}99;\ 1{,}01[$ contiene altri infiniti punti di A:

$$\frac{100}{101},\ \frac{101}{102},\ \frac{102}{103},\ \dots$$

E così via.

Osserva che il punto 1 è punto di accumulazione di A, ma non appartiene ad A.



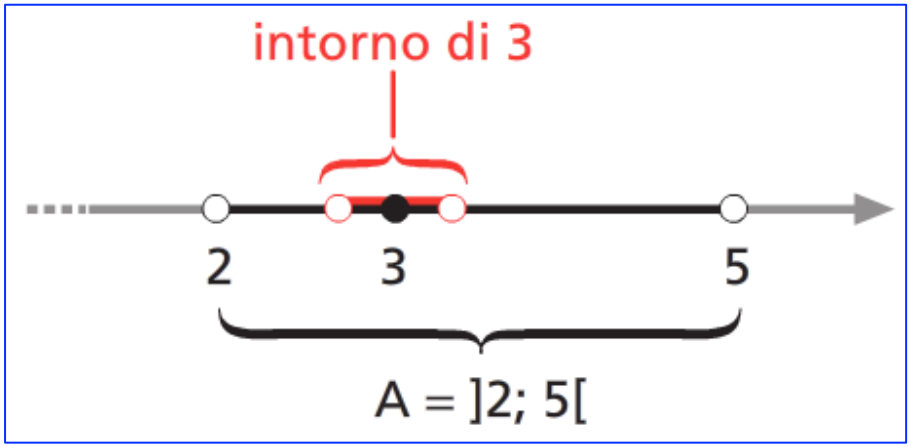
esempio

Osservazione: ogni punto di un intervallo è di accumulazione per l'intervallo stesso. Anche gli estremi dell'intervallo sono suoi punti di accumulazione.

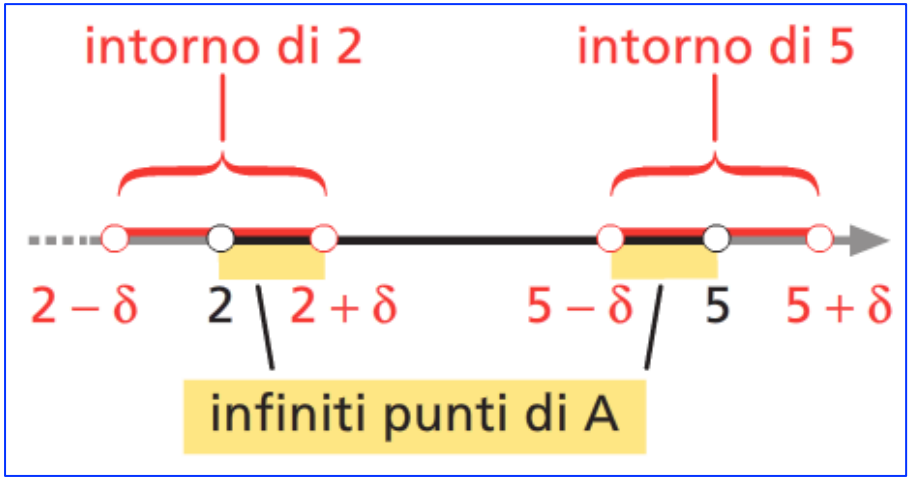
Sia dato l'insieme di numeri reali A=]2;5[. Il punto 3 di A è di accumulazione per A perché ogni intorno di 3 contiene infiniti punti di A. Anche i punti 2 e 5, che non appartengono ad A, sono di accumulazione per A.

Osservazione: gli esempi svolti mostrano che un punto di accumulazione di un insieme può appartenere o non appartenere all'insieme stesso.

esempio



Tutti i punti dell'intorno di 3 sono contenuti in A=]2;5[e sono infiniti. 3 è un punto di accumulazione per A.



Gli estremi 2 e 5 dell'intervallo A, e non appartenenti ad A, sono punti di accumulazione: gli intorni]2-δ; 2+δ[e]5-δ; 5+δ[contengono infiniti elementi dell'intervallo]2; 5[.

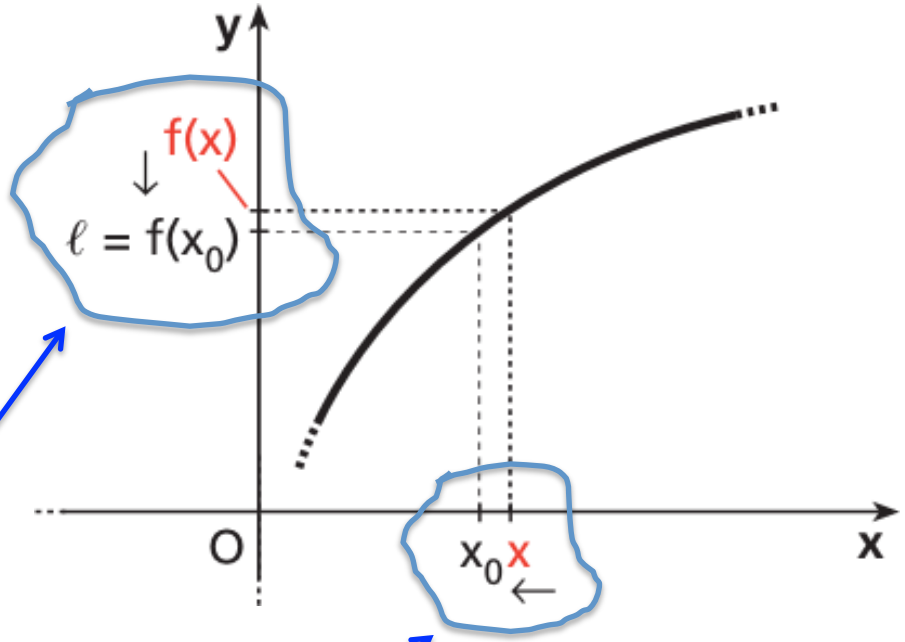
IL LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE A UN VALORE FINITO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

◆ LA DEFINIZIONE

Consideriamo la funzione y=f(x), ossia:

$$f : D \to \Re \quad con \; D \subset \Re$$



Vogliamo elaborare uno strumento matematico che ci consenta di descrivere con precisione la seguente proprietà:

più scegliamo x vicino al valore di x_0 e più la sua immagine f(x) si avvicina a un certo valore l=f(x_0),

A tal proposito consideriamo la seguente funzione:

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

$$D = \Re - \{3\}$$

Vogliamo studiare il comportamento della funzione vicino al punto $x_0=3$.

Poiché la funzione non è definita in $x_0=3$, non ha senso considerare f(3). Allora, cerchiamo di capire a quale valore ℓ si avvicina la funzione quando x si avvicina sempre di più a x_0:

x	2,9	2,99	2,999	2,9999	$\rightarrow 3 \leftarrow$	3,0001	3,001	3,01	3,1
$f(x)$	5,8	5,98	5,998	5,9998		6,0002	6,002	6,02	6,2

Quanto più x si avvicina a 3, tanto più f(x) si avvicina al valore 6.

In generale: se prendiamo un qualunque valore di x in un intorno di 3 sempre più piccolo, allora f(x) si trova sempre più vicino a 6, cioè si trova in un intorno di 6 sempre più piccolo.

Infatti, se consideriamo un qualunque intorno circolare di 6 di ampiezza ε, esiste sempre un intorno di 3 i cui punti x (con $x \neq 3$) hanno immagine f(x) contenuta nell'intorno $I_\varepsilon(6)$.

In termini matematici, i punti di tale intorno sono quei valori di x che soddisfano la disequazione:

$$\left|f(x)-6\right|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<\frac{2x^2-6x}{x-3}-6<\varepsilon$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$3-\frac{\varepsilon}{2}<x<3+\frac{\varepsilon}{2}$$

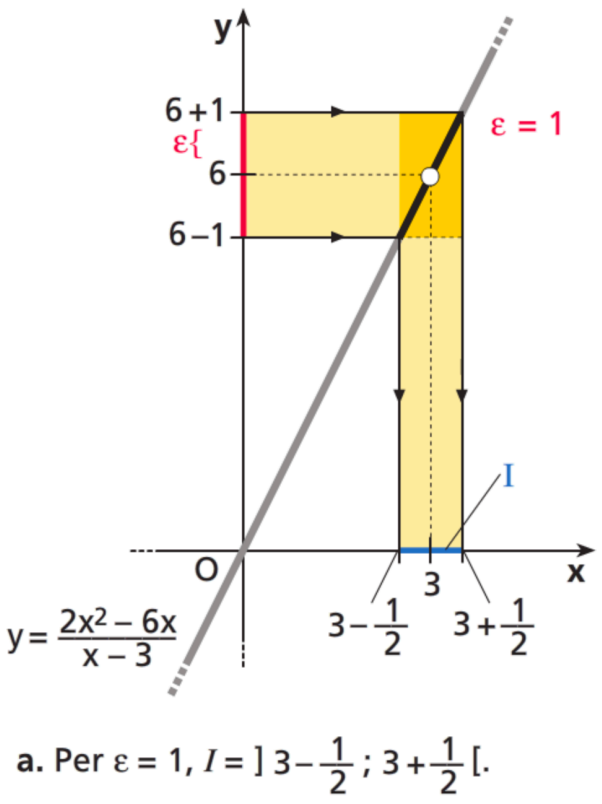
La soluzione della disequazione sono i punti dell'intorno:

$$I(3)=\left]3-\frac{\varepsilon}{2};3+\frac{\varepsilon}{2}\right[$$

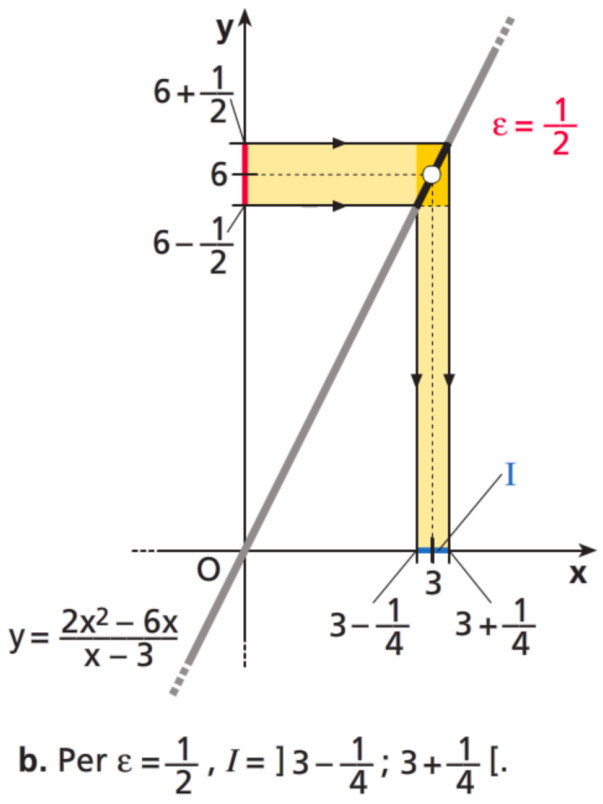
In definitiva, possiamo così riassumere:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists I(3):\forall x\in I(3),\ con\ \ x\neq 3,\ \left|f(x)-6\right|<\varepsilon$$

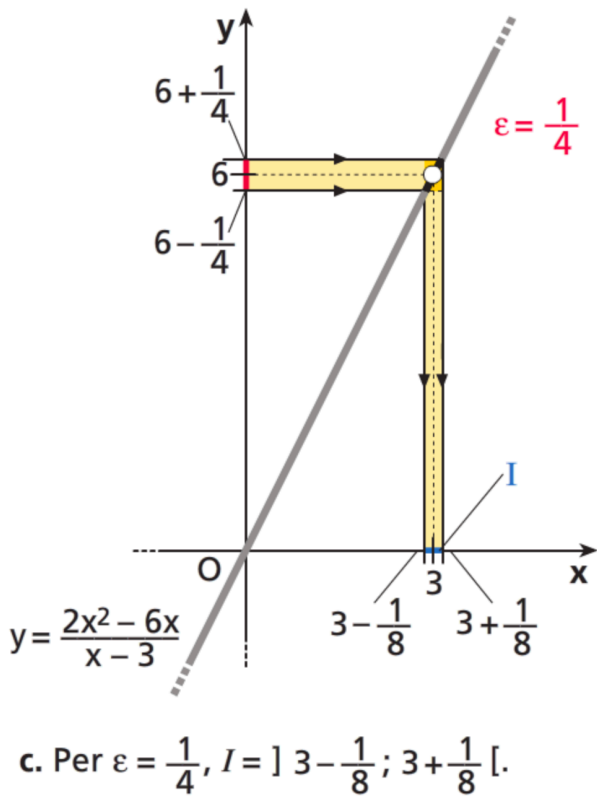
Questa proprietà è possibile osservarla anche sul grafico della funzione:



a. Per $\varepsilon = 1$, $I =]3-\frac{1}{2}\,;\,3+\frac{1}{2}[$.



b. Per $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $I =]3-\frac{1}{4}\,;\,3+\frac{1}{4}[$.



c. Per $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $I =]3-\frac{1}{8}\,;\,3+\frac{1}{8}[$.

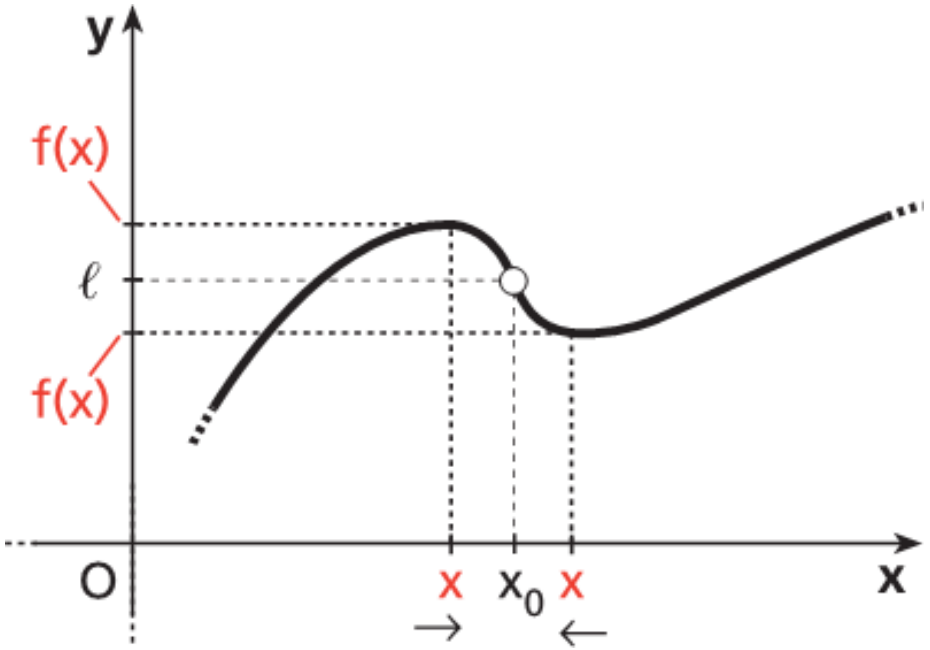
Diciamo allora che:

per x che tende a 3, f(x) ha limite 6

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x\to 3} \frac{2x^2-6x}{x-3} = 6$$

Osservazione: lo stesso ragionamento vale anche nel caso in cui x_0 non appartenga al dominio della funzione, purchè sia un punto di accumulazione, in quanto dobbiamo considerare le immagini f(x) di punti sempre più vicini a x_0.

x_0 non appartiene al campo di esistenza. Quando x si avvicina a x_0, $f(x)$ si avvicina a un valore l che non è $f(x_0)$.

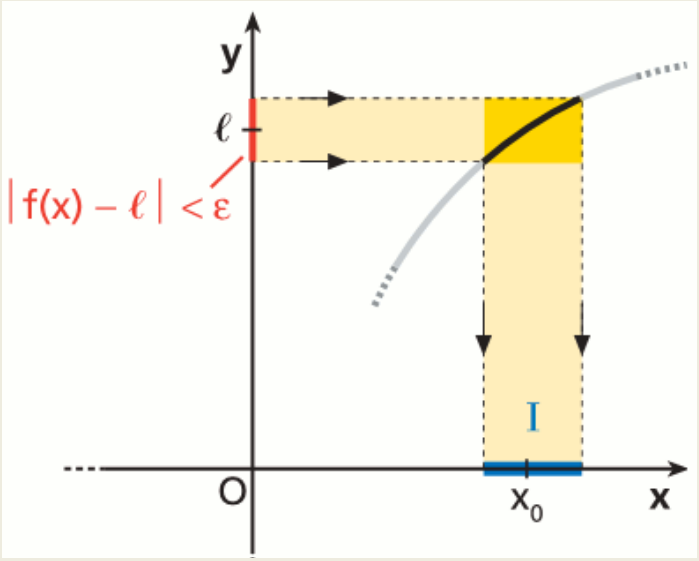


In generale possiamo dare la seguente definizione:

Definizione – Limite finito per x che tende a x_0

Si dice che la funzione f(x) ha per limite il numero reale ℓ per x che tende a x_0, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

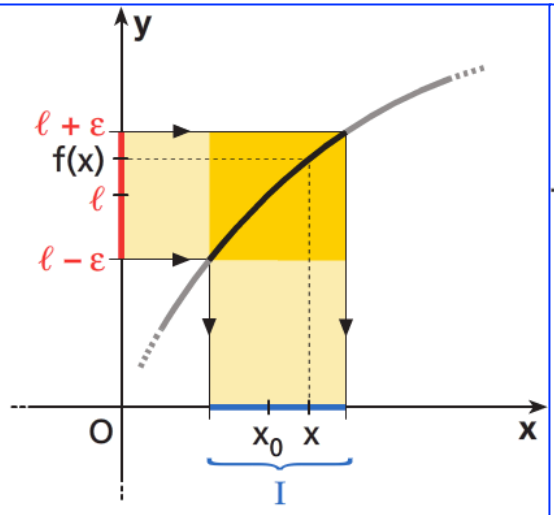


quando:

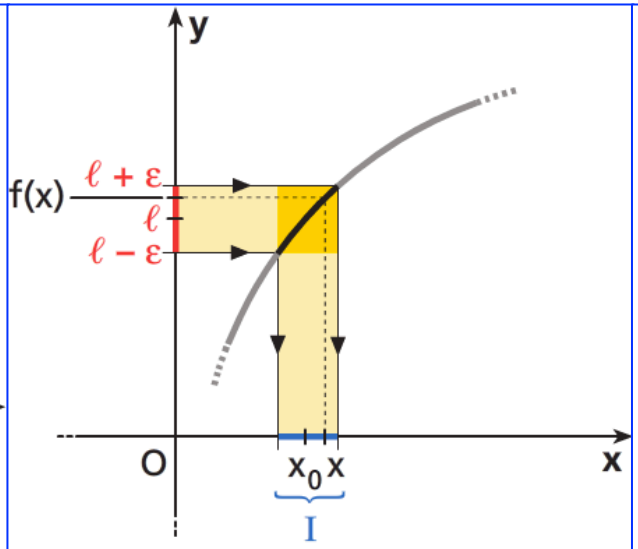
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \ con \ |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ si \ ha \ |f(x) - l| < \varepsilon$$

e si legge: comunque si scelga un numero reale positivo piccolo a piacere ε si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

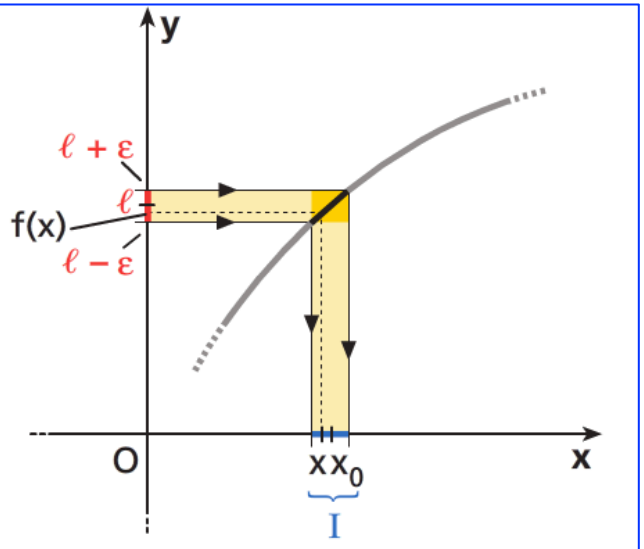
◆ SIGNIFICATO DEFINIZIONE



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$ per ogni $x \in I$.



b. Se riduciamo ε, troviamo un intorno di x_0 più piccolo.



c. Più piccolo scegliamo ε, più piccolo diventa, in genere, l'intorno I.

Significato intuitivo della definizione: L'esistenza del limite assicura che se x si avvicina indefinitamente a x_0, $f(x)$ si avvicina indefinitamente a l .

◆ VERIFICA DEL LIMITE

Per eseguire la verifica del limite: dobbiamo applicare la definizione. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

ESEMPIO

Verifichiamo che: $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 3$

Applichiamo la definizione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |(2x - 1) - 3| < \varepsilon \rightarrow |2x - 4| < \varepsilon$$

Esplicitiamo il valore assoluto e facciamo i calcoli:

$$-\varepsilon < 2x - 4 < \varepsilon \rightarrow 4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon \rightarrow 2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dall'intervallo:

$$\left]2-\frac{\varepsilon}{2};2+\frac{\varepsilon}{2}\right[$$

L'intervallo trovato rappresenta un intorno circolare di 2 (per qualunque valore reale di **ε** piccolo a piacere) per cui è vera la condizione iniziale:

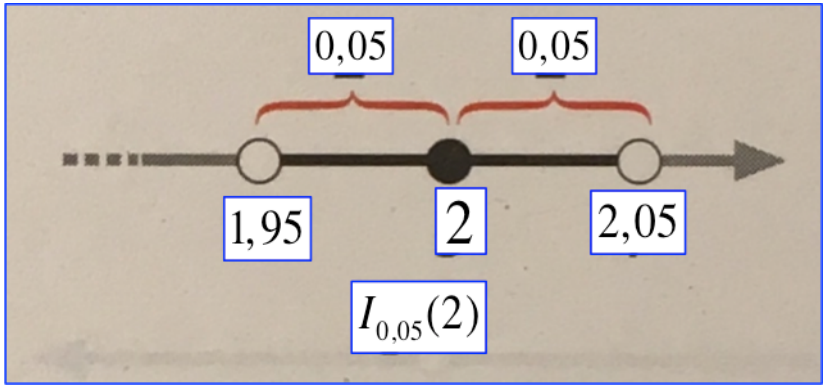
$$|f(x)-l|<\varepsilon \rightarrow |2x-4|<\varepsilon$$

quindi, il limite è verificato.

Infatti, scegliamo un ε piccolo a piacere e controlliamo che l'intervallo è un intorno circolare di 2:

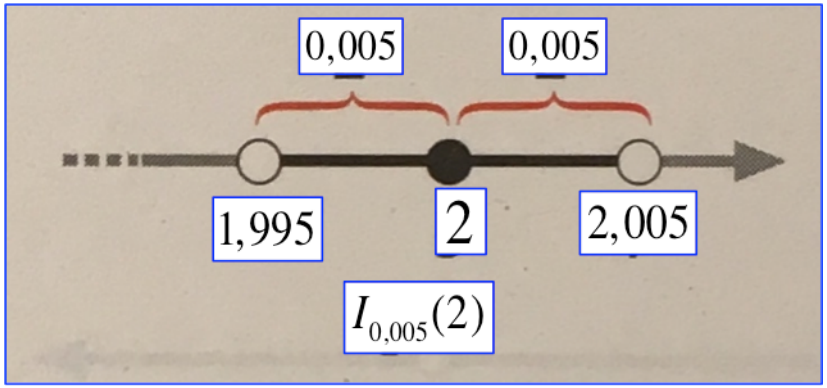
$(\varepsilon=0,1)$

$$\left]2-\frac{0,1}{2};2+\frac{0,1}{2}\right[=]1,95;2,05[$$



$(\varepsilon=0,01)$

$$\left]2-\frac{0,01}{2};2+\frac{0,01}{2}\right[=]1,995;2,005[$$



Con ε piccolo a piacere, l'intervallo diventa sempre più piccolo ma sarà sempre un intorno circolare di 2.

ESEMPIO

Verifichiamo che: $\lim_{x \to 2} (2x - 1) = 5$

Applichiamo la definizione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow |(2x - 1) - 5| < \varepsilon \rightarrow |2x - 6| < \varepsilon$$

Esplicitiamo il valore assoluto e facciamo i calcoli:

$$-\varepsilon < 2x - 6 < \varepsilon \rightarrow 6 - \varepsilon < 2x < 6 + \varepsilon \rightarrow 3 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 3 + \frac{\varepsilon}{2}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dall'intervallo:

$$\left]3 - \frac{\varepsilon}{2}; 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$$

L'intervallo trovato non rappresenta un intorno circolare di 2 (per qualunque valore reale di ε piccolo a piacere) per cui non è vera la condizione iniziale:

$$|f(x)-l|<\varepsilon \rightarrow |2x-6|<\varepsilon$$

quindi, il limite non è verificato.

Infatti, scegliamo un ε piccolo a piacere e controlliamo che l'intervallo non è un intorno circolare di 2:

(ε=0,1)

$$\left]3-\frac{0,1}{2};3+\frac{0,1}{2}\right[=\left]2,95;3,05\right[$$

2 non è contenuto nell'intervallo

◆ CONCLUSIONE

Per eseguire la verifica del limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

1. Risolvere la disequazione:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

2. Verificare che l'intervallo, soluzione della disequazione, è un intorno completo di x_0.

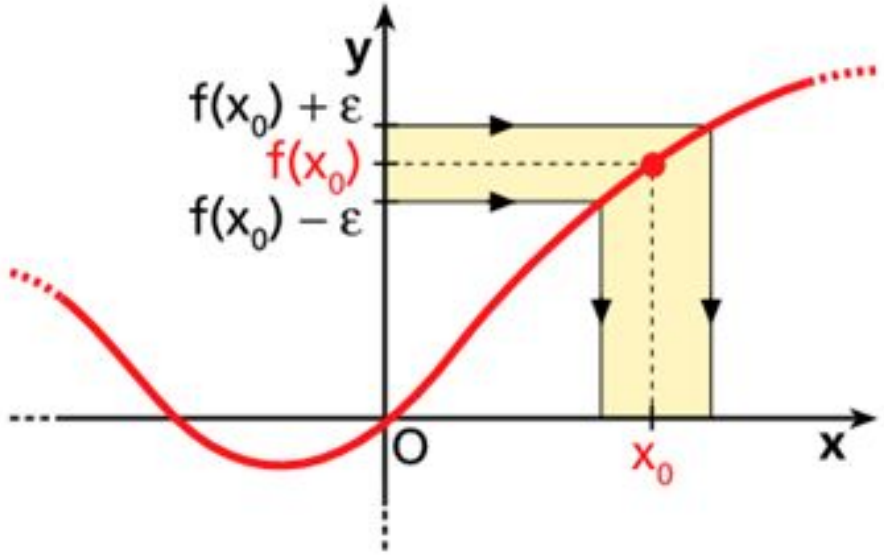
3. Scegliere per **ε** alcuni valori positivi piccoli a piacere e controllare che gli intervalli conseguenti contengono il punto x_0 .

◆ FUNZIONI CONTINUE

definizione – Una funzione y=f(x) è continua in un punto x_0 se x_0 appartiene al dominio di f(x) e il limite in x_0 coincide con $f(x_0)$, ossia:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

In sostanza, esiste il valore della funzione $f(x_0)$ nel punto x_0.



definizione – Una funzione y=f(x) è continua nel suo dominio D, se è continua in ogni punto di D.

Quindi, il limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

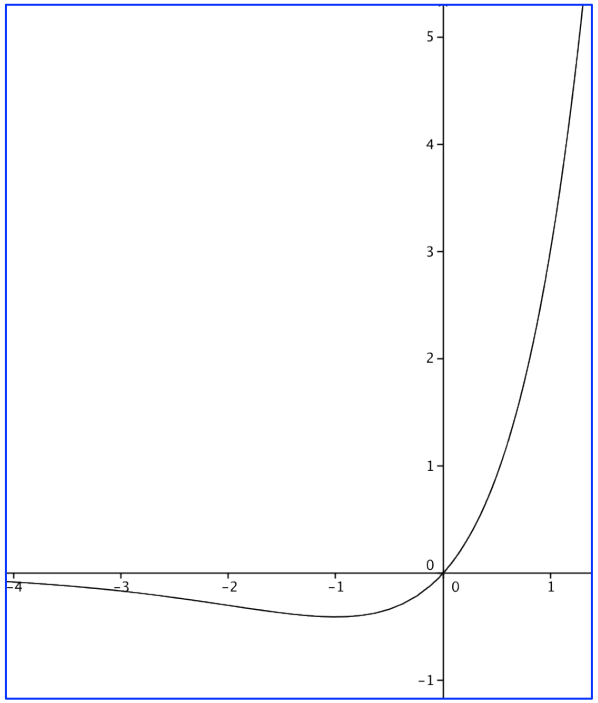
esiste per ogni x_0 appartenente a D.

Il dominio della funzione:

$$y = 3x \cdot e^{x+1}$$

è tutto l'insieme dei numeri reali D=R.

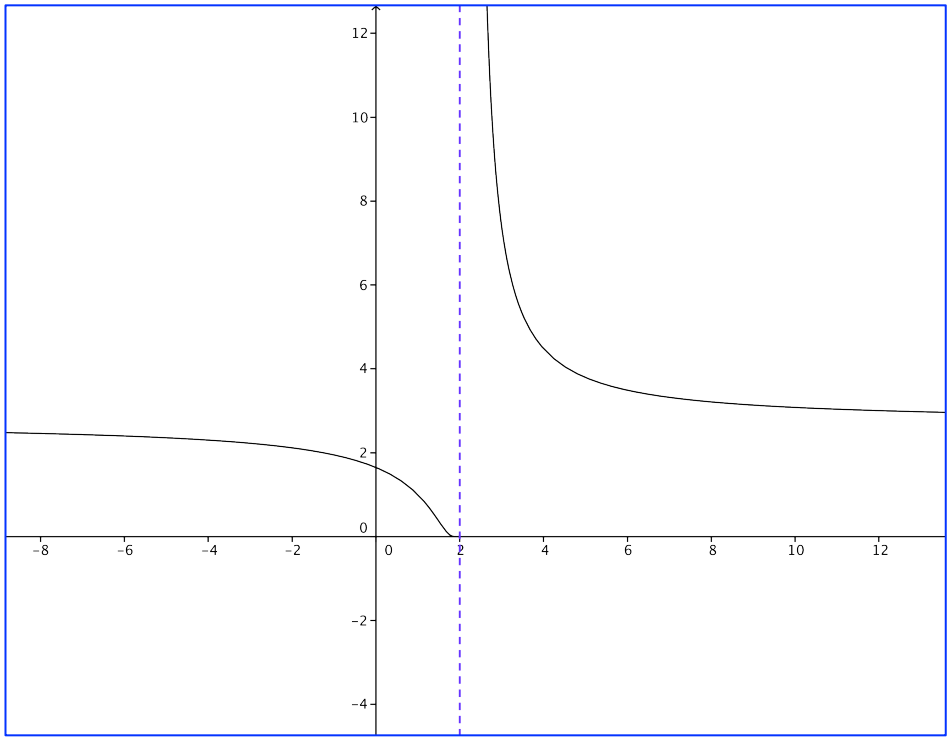
La funzione è continua in tutto il suo dominio D=R.



Il dominio della funzione:

$$y = e^{\frac{x+1}{x-2}}$$

è D=R-{2}.



La funzione non è continua nel punto di ascissa x_0=2 (punto di discontinuità).

La retta x=2 si chiama asintoto verticale

La funzione è continua in D=R-{2}

◆ LIMITE DESTRO E SINISTRO

definizione – Si dice che l è il limite destro della funzione f(x) in x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

se la disuguaglianza:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

è verificata per ogni x appartenente a un intorno destro di x_0:

$$]x_0 ; x_0 + \delta[$$

definizione – Si dice che l è il limite sinistro della funzione f(x) in x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

se la disuguaglianza:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

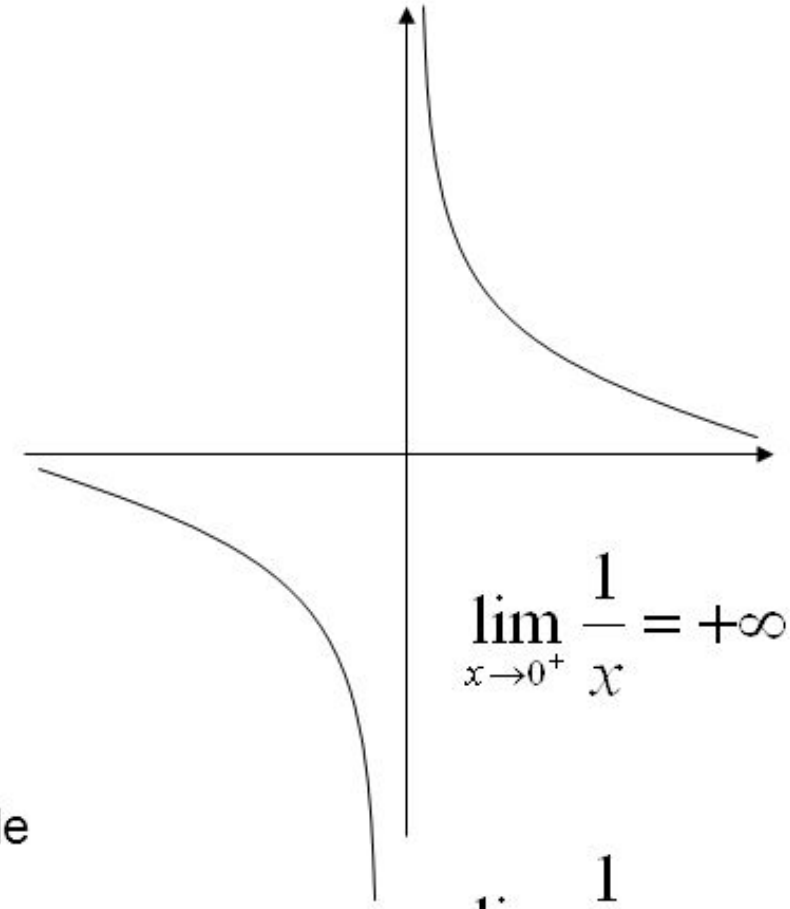
è verificata per ogni x appartenente a un intorno sinistro di x_0:

$$]x_0 - \delta ; x_0[$$

ESEMPIO

$$Dom(f) = R - \{0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



La frontiera del dominio di f è lo zero

Studiamo la funzione in un intorno di zero

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Se x tende a zero **da destra** allora
la funzione diventa sempre più grande

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Se x tende a zero **da sinistra** allora
la funzione diventa sempre più grande ma con segno -

IL LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE A UN VALORE FINITO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

Limite $+\infty$ per x che tende a x_0

Sia $f(x)$ una funzione non definita in x_0.

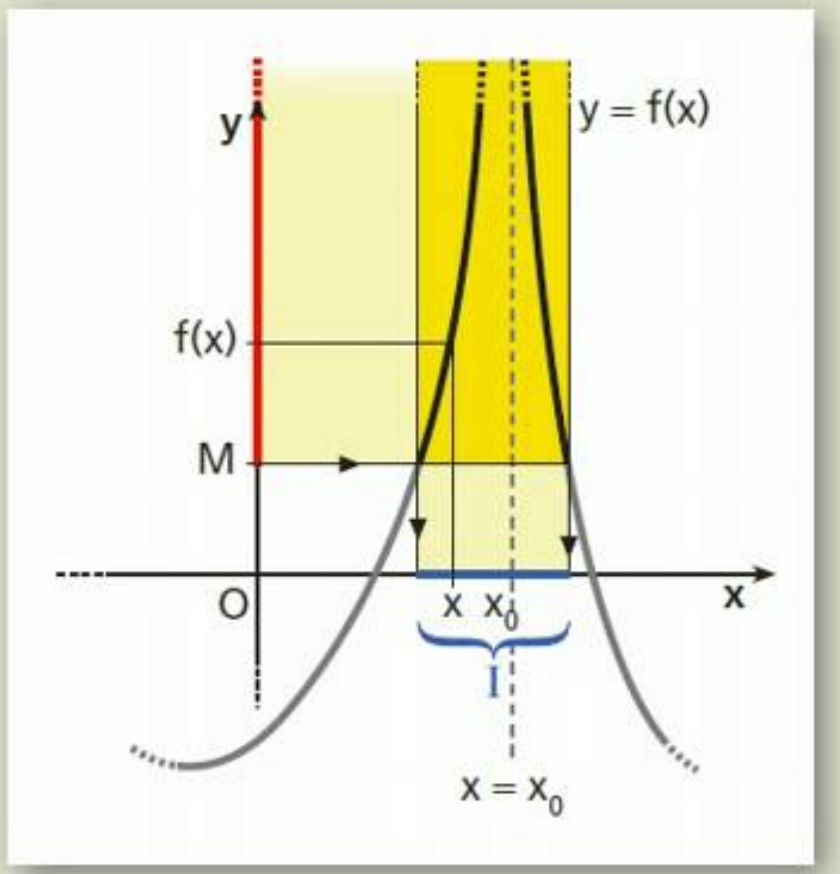
Si dice che $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 e si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti

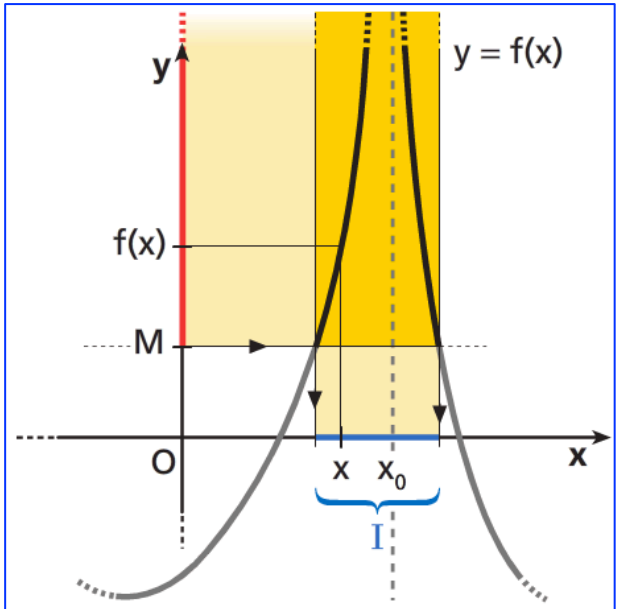
$$f(x) > M$$

per ogni x appartenente a I e diverso da x_0.

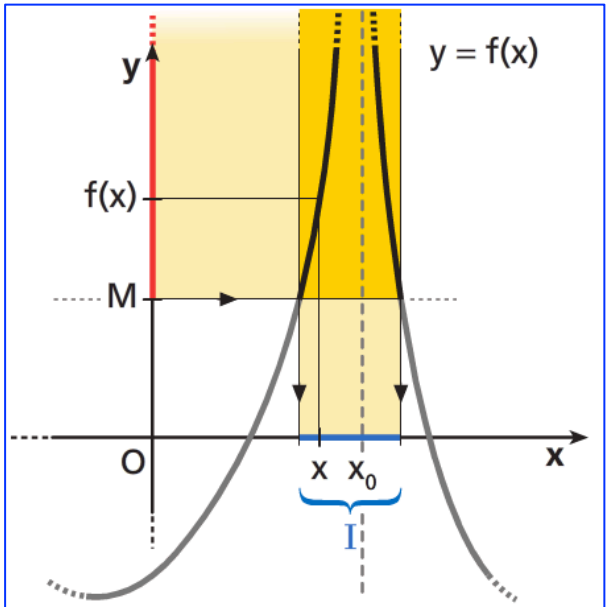


$$\forall M > 0 \ \exists \delta_M > 0 : \forall x \ con \ |x - x_0| < \delta_M \ \ si \ ha \ \ f(x) > M$$

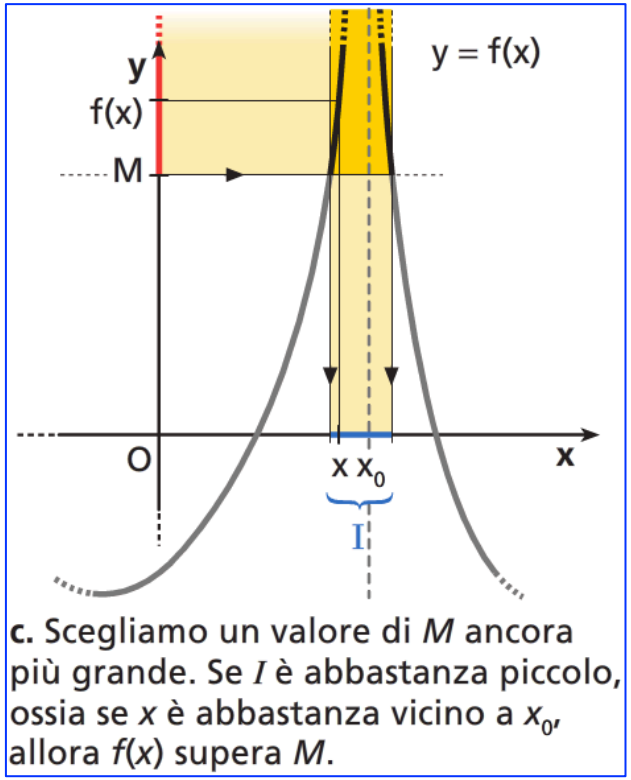
◆ SIGNIFICATO DEFINIZIONE



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$. Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) > M$ $\forall\, x \in I - \{x_0\}$.



b. Se prendiamo M più grande, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.



c. Scegliamo un valore di M ancora più grande. Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ supera M.

L' esistenza del limite assicura che se x si avvicina indefinitamente a x_0, $f(x)$ si avvicina indefinitamente a $+\infty$, ossia f(x) assume valori sempre più grandi degli M scelti grandi a piacere.

Quando si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

si dice anche che la funzione **diverge positivamente**.

◆ VERIFICA DEL LIMITE

Per eseguire la verifica del limite: dobbiamo applicare la definizione. $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$y = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad definita\ in\ D =]0;2[- \{1\}$$

Verifichiamo che:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Applichiamo la definizione:

$$f(x) > M \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M \rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$$

Facciamo la radice quadrata di entrambi i membri ed esplicitiamo il valore assoluto:

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$ricorda\ che: \sqrt{x^2} = |x|$$

Tenendo conto del C.E., l'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dall'intervallo:

$$\left]1-\frac{1}{\sqrt{M}};1+\frac{1}{\sqrt{M}}\right[$$

L'intervallo trovato rappresenta un intorno completo di 1, per qualunque valore reale positivo M grande a piacere, per cui è vera la condizione:

$$f(x)>M \Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2}>M$$

quindi, il limite è verificato.

Definizione – Limite -∞ per x che tende a x_0

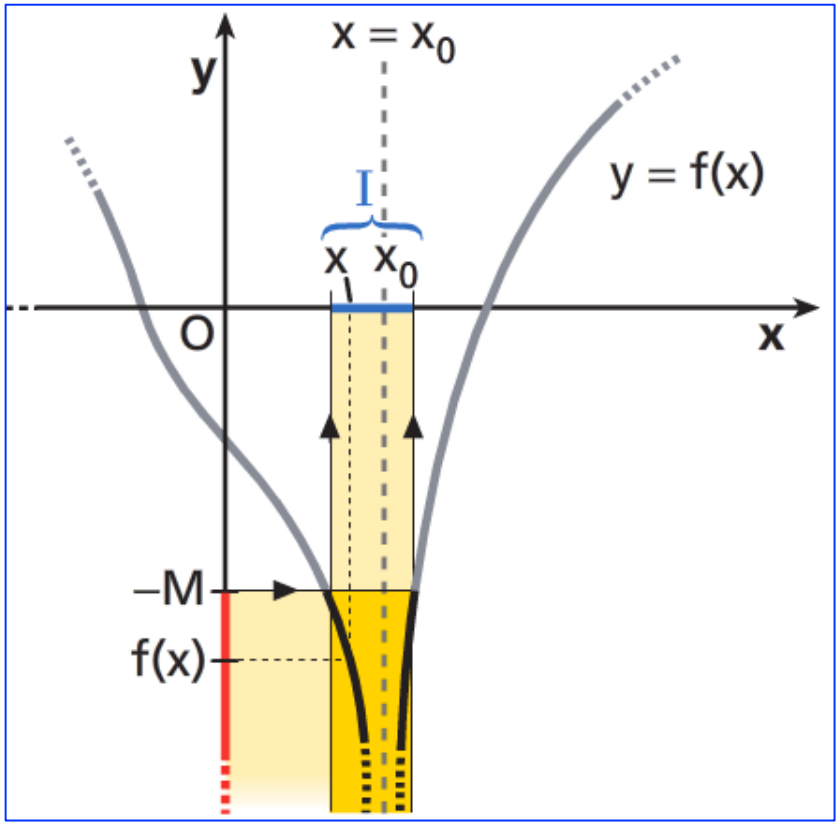
Sia f(x) una funzione non definita in x_0. Si dice che f(x) tende a -∞ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

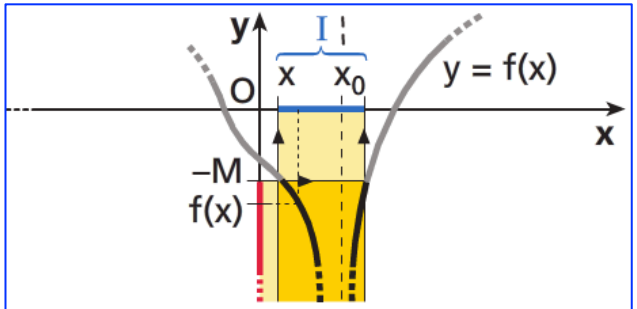
quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo I di x_0 tale che risulti:

$$f(x) < -M$$

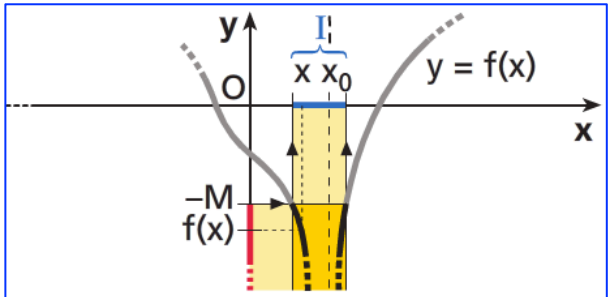
per ogni x appartenente a I diverso da x_0.



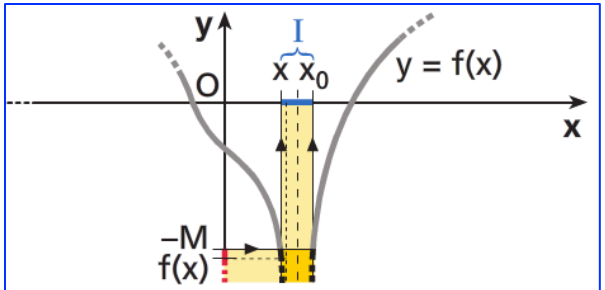
◆ SIGNIFICATO DEFINIZIONE



a. Fissiamo $M \in \mathbb{R}^+$.
Individuiamo un intorno I di x_0 tale che $f(x) < -M \ \forall\, x \in I - \{x_0\}$.



b. Se prendiamo M più grande, ossia $-M$ minore, I esiste ancora e risulta, in genere, più piccolo.



c. Scegliamo un valore di M ancora più grande ($-M$ ancora minore).
Se I è abbastanza piccolo, ossia se x è abbastanza vicino a x_0, allora $f(x)$ è minore di $-M$.

L' esistenza del limite assicura che se x si avvicina indefinitamente a x_0, $f(x)$ si avvicina indefinitamente a $-\infty$, ossia f(x) assume valori sempre più piccoli dei -M scelti a piacere sempre più piccoli.

Quando si verifica che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

si dice anche che la funzione **diverge negativamente**.

◆ VERIFICA DEL LIMITE

Per eseguire la verifica del limite: dobbiamo applicare la definizione. $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

ESEMPIO

Consideriamo la funzione:

$$y = -\frac{1}{(x-1)^2} \qquad definita\ in\ D = \Re - \{1\}$$

Verifichiamo che:

$$\lim_{x\to 1} -\frac{1}{(x-1)^2} = -\infty$$

Applichiamo la definizione:

$$f(x) < -M \Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2} < -M \rightarrow \frac{1}{(x-1)^2} > M \rightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M}$$

Facciamo la radice quadrata di entrambi i membri ed esplicitiamo il valore assoluto:

$$|x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow 1-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1+\frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$ricorda\ che: \sqrt{x^2} = |x|$$

Tenendo conto del C.E., l'insieme delle soluzioni della disequazione è dato dall'intervallo:

$$\left]1-\frac{1}{\sqrt{M}};1+\frac{1}{\sqrt{M}}\right[$$

L'intervallo trovato rappresenta un intorno completo di 1, per qualunque valore reale positivo M grande a piacere, per cui è vera la condizione:

$$f(x)<-M \Rightarrow -\frac{1}{(x-1)^2}<-M$$

quindi, il limite è verificato.

Definizione – Limite ∞ per x che tende a x_0

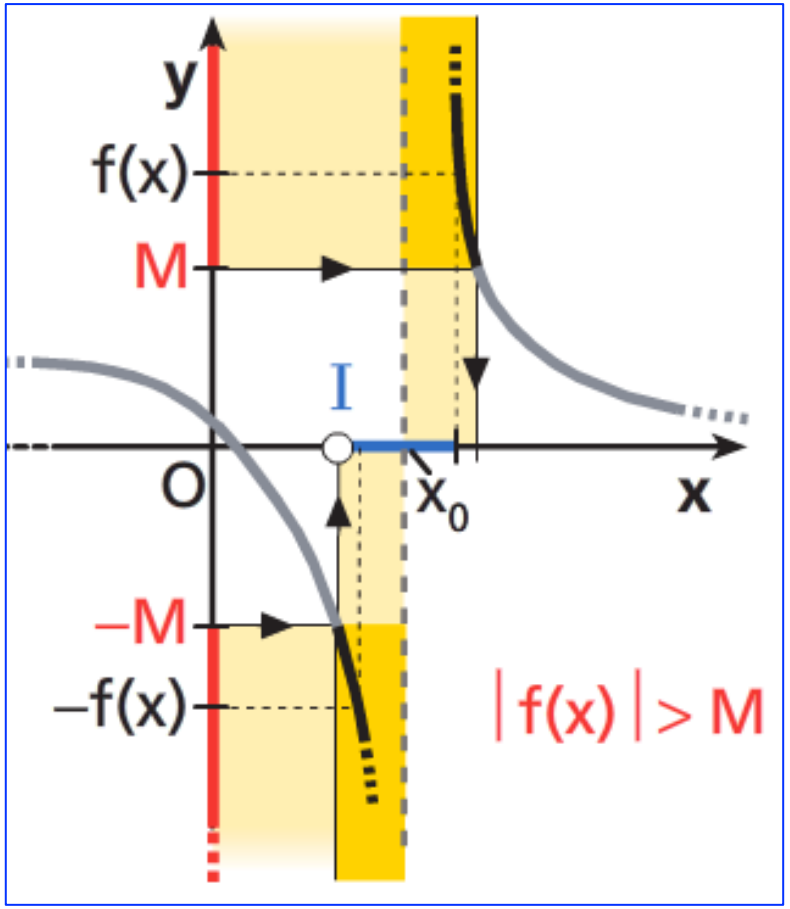
Sia f(x) una funzione non definita in x_0. Si dice che f(x) tende a ∞ per x che tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se per ogni M>0, è possibile trovare un intorno I di x_0 tale che:

$$|f(x)| > M$$

per ogni x appartenente a I nel dominio di f(x), con $x \neq x_0$.



Notare che:

$$|f(x)| > M \xrightarrow{EQUIVALENTE} f(x) > M \ \vee \ f(x) < -M$$

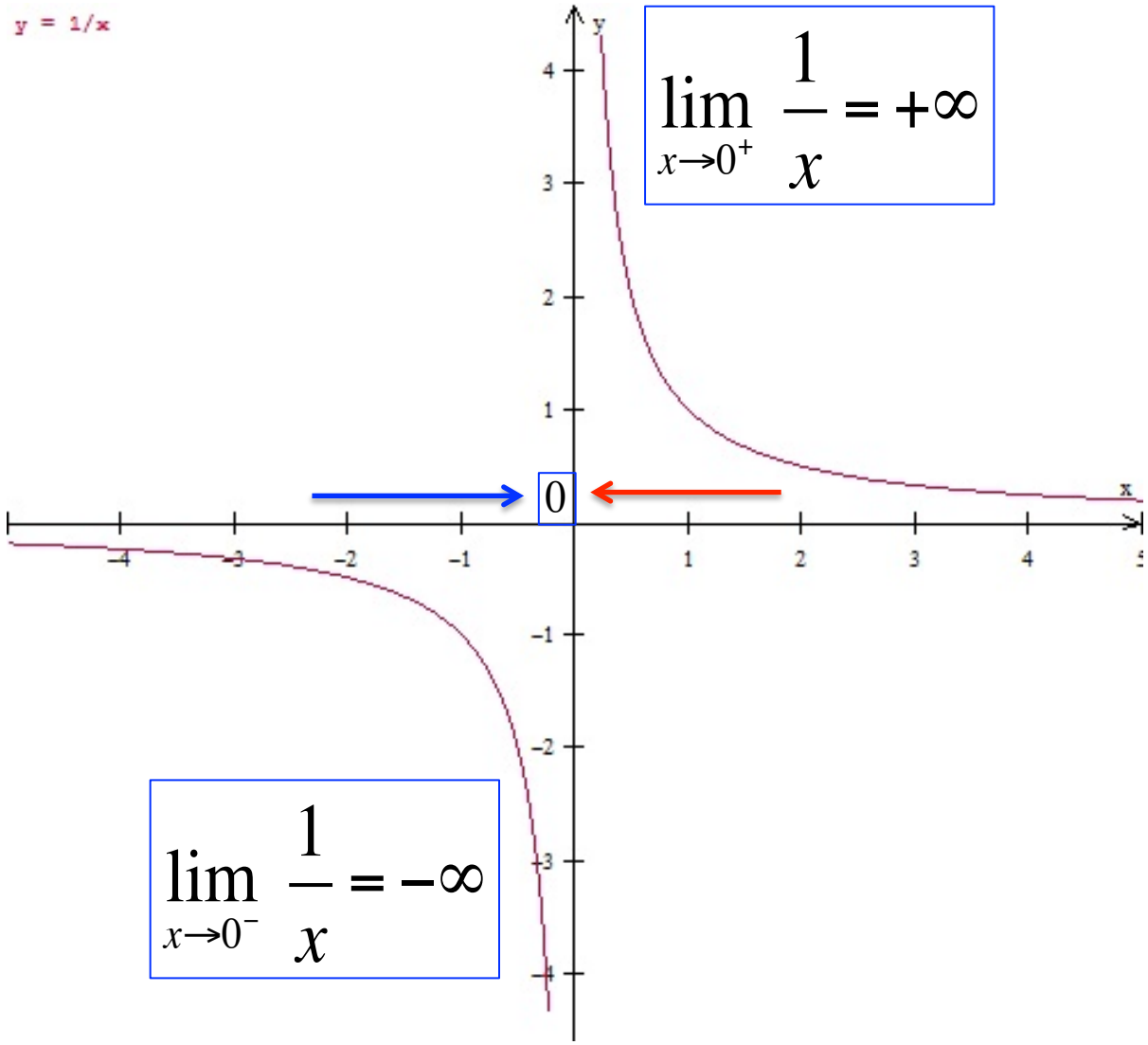
La soluzione della disequazione è l'unione delle soluzioni delle singole disequazioni.

ESEMPIO

La funzione: $y = \frac{1}{x}$ *definita in* $D = \Re - \{0\}$

diverge sia positivamente che negativamente:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

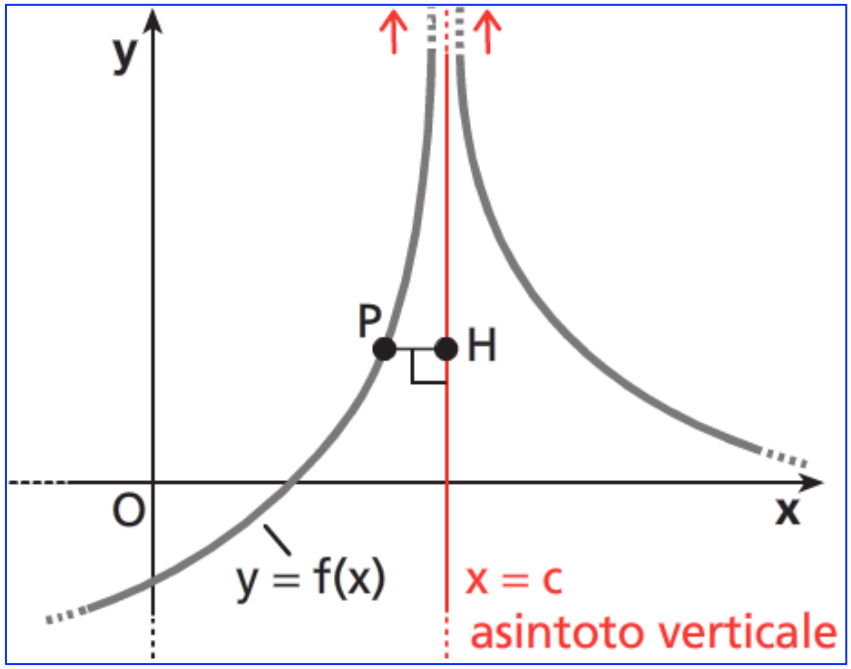

y = 1/x
y
x
0
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

◆ ASINTOTI VERTICALI

Definizione – Data la funzione f(x), se si verifica che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

si dice che la retta x=c è asintoto verticale per il grafico della funzione.

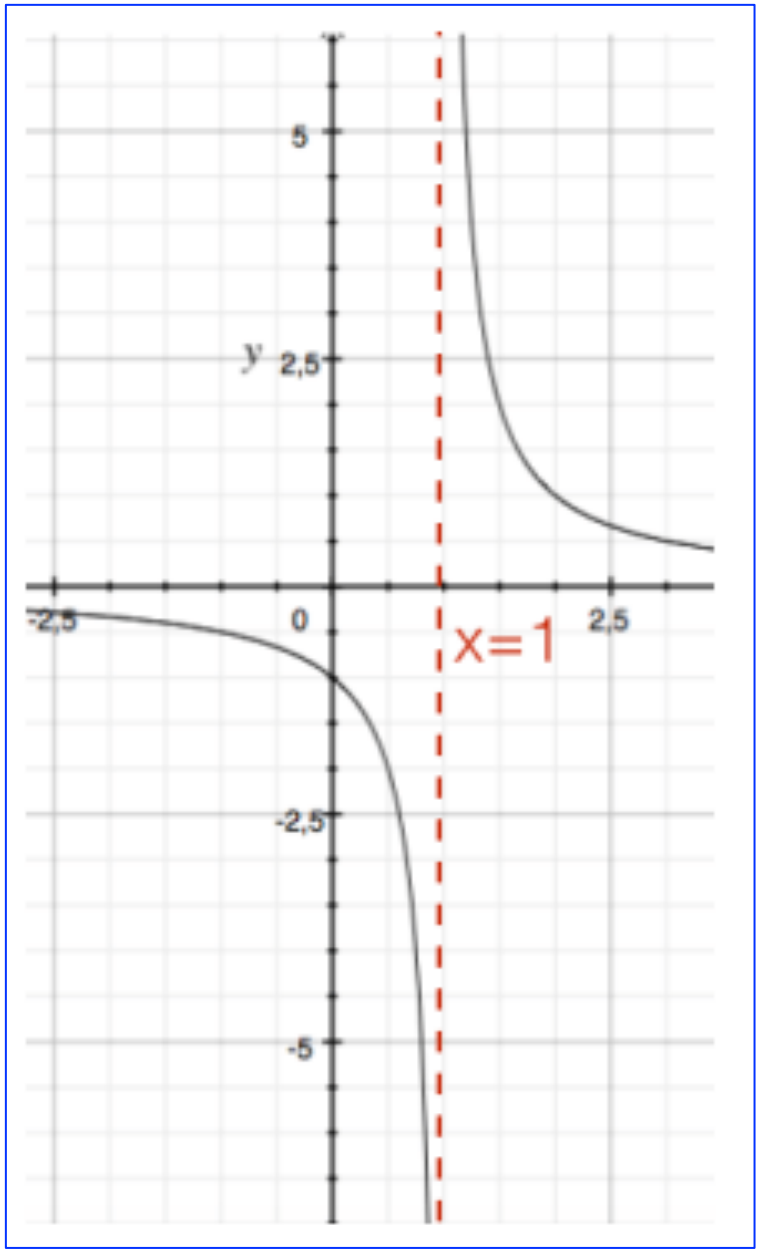


◆ SIGNIFICATO

$$\lim_{x \to c} \overline{PH} = \lim_{x \to c} |x - c| = 0$$

Quando x tende a c, la distanza PH tende a zero.

ESEMPIO



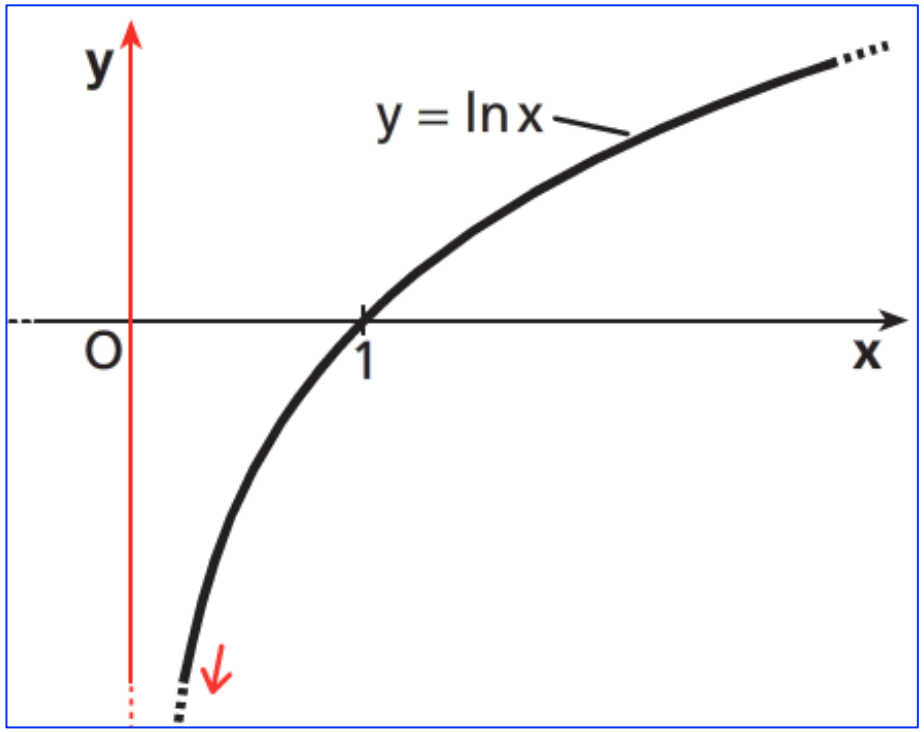
La funzione:

$$y = \frac{1}{x-1} \qquad definita\ in\ D = \Re - \{1\}$$

ha asintoto verticale x=1 perché:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

ESEMPIO



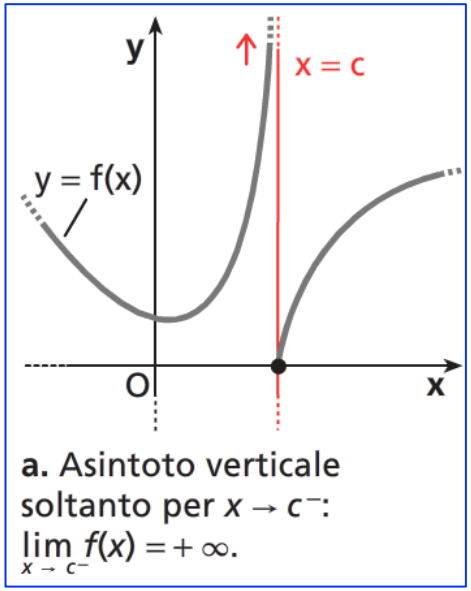
La funzione:

$$y = \ln x \qquad definita\ in\ D =]0;+\infty[$$

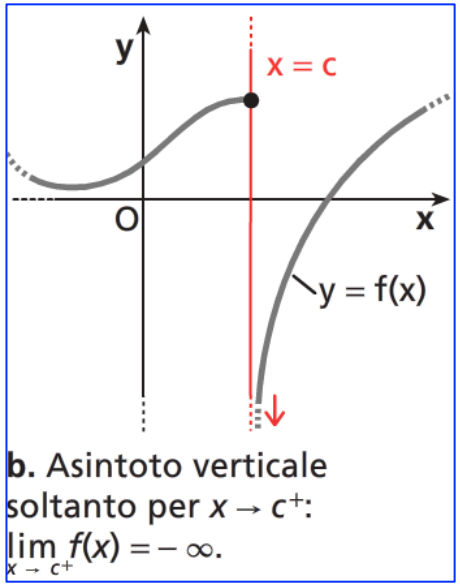
ha asintoto verticale x=0 perché:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

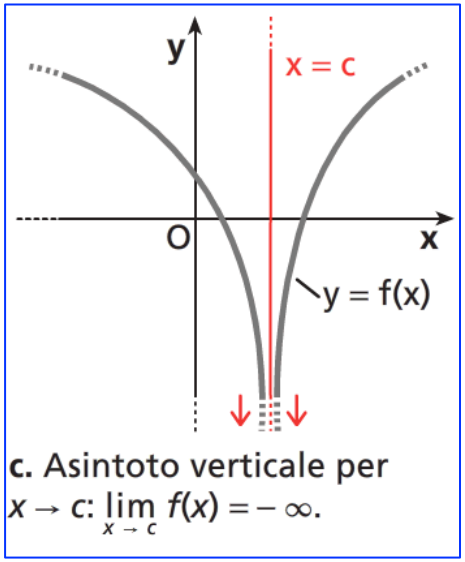
In generale, una funzione può avere più asintoti verticali (vedi la funzione tangente), oppure l'asintoto è verticale solo "da destra" (come nel caso della funzione logaritmo precedente) o "da sinistra":



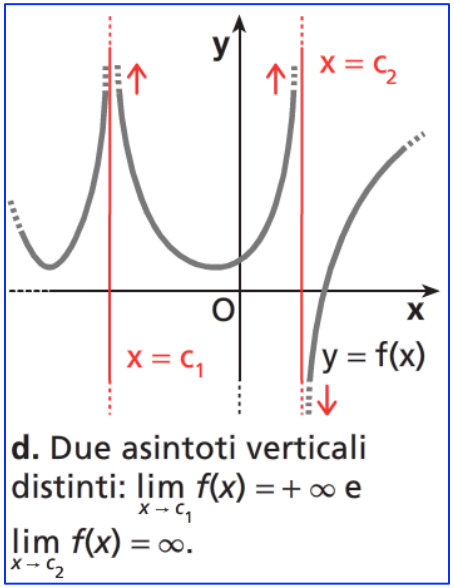
a. Asintoto verticale soltanto per $x \to c^-$: $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$.



b. Asintoto verticale soltanto per $x \to c^+$: $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$.



c. Asintoto verticale per $x \to c$: $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.



d. Due asintoti verticali distinti: $\lim_{x \to c_1} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to c_2} f(x) = \infty$.

IL LIMITE FINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE ALL'INFINITO

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

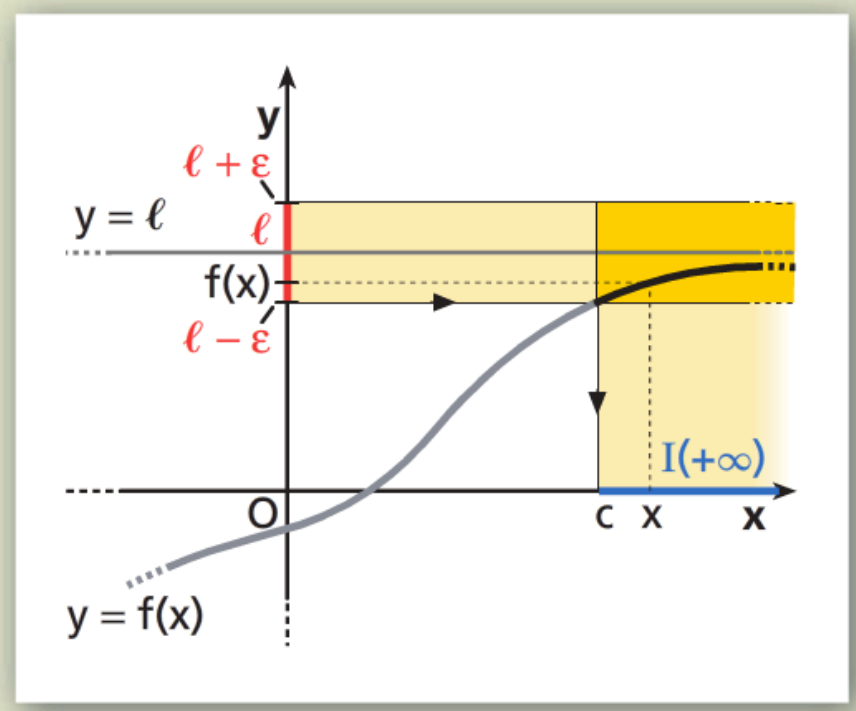
Limite finito di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ tende al numero reale l per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

quando, comunque si scelga un numero reale positivo ε, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

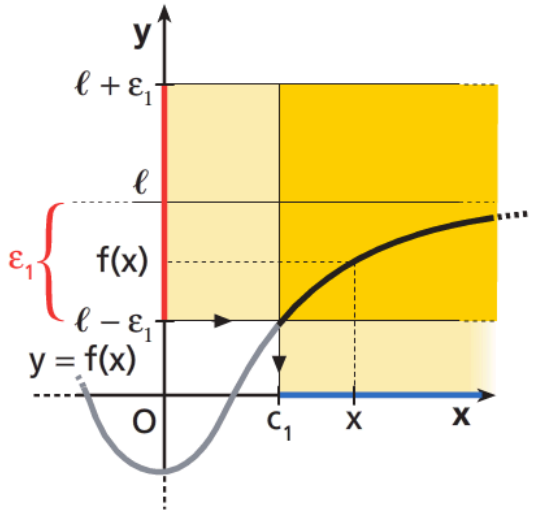
$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I.$$



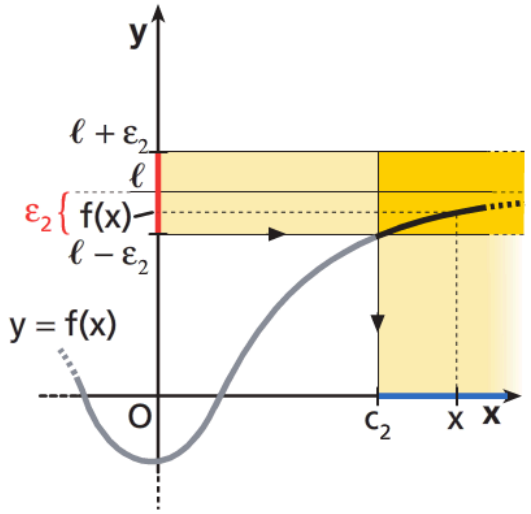
In maniera simbolica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,\big|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x > c$$

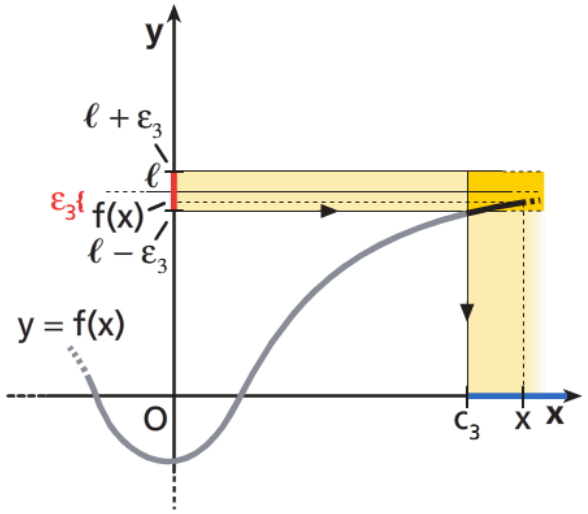
◆ SIGNIFICATO DEFINIZIONE



a. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Individuiamo $c_1 > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $x > c_1$, ossia per ogni punto dell'intorno di $+\infty$: $]c_1; +\infty[$.



b. Se ε diventa più piccolo, la disuguaglianza $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ è ancora vera, purché scegliamo valori di x più grandi di $c_2 > c_1$.



c. Scegliamo ε ancora più piccolo. In genere, perché $f(x)$ sia distante da ℓ meno di ε, dovremo prendere c_3 ancora più grande.

L' esistenza del limite assicura che al crescere dei valori di x (x che tende all'infinito), $f(x)$ si avvicina sempre di più al valore ℓ.

◆ DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

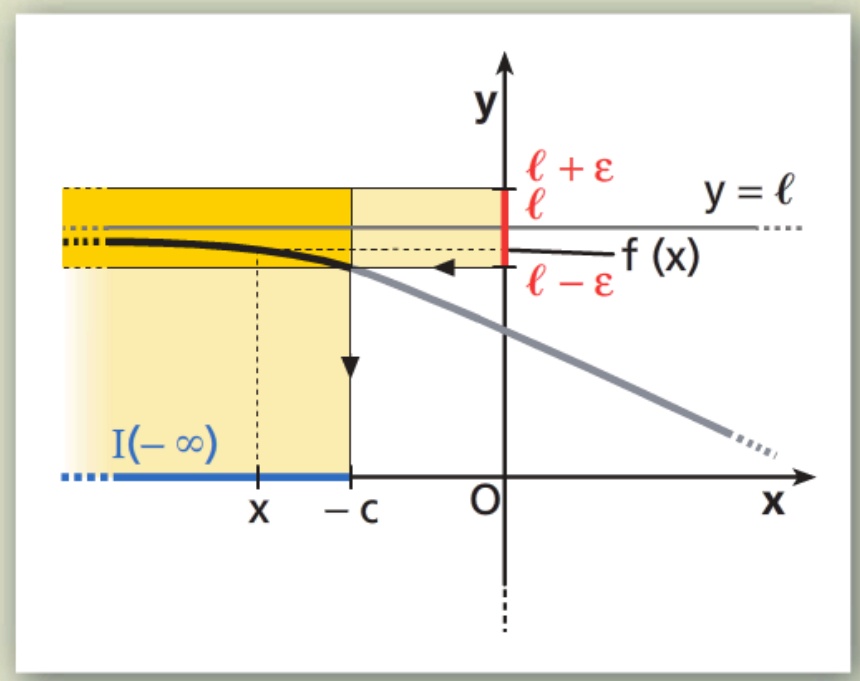
Limite finito di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che una funzione $f(x)$ ha limite reale l per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ fissato è possibile trovare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I.$$



In maniera simbolica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c > 0 \,\big|\, |f(x) - l| < \varepsilon, \forall x < -c$$

◆ IN GENERALE

Definizione – Limite finito per x che tende a ∞

Si dice che f(x) tende a un limite finito l per x che tende a ∞:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

quando per ogni ε>0, è possibile trovare un intorno I di ∞ tale che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon M$$

per ogni x appartenente a I.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $y = \dfrac{4x+5}{x}$, definita in $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Verifichiamo che:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x+5}{x} = 4.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione:

$$\left| \frac{4x+5}{x} - 4 \right| < \varepsilon.$$

Svolgendo i calcoli si ha $|x| > \dfrac{5}{\varepsilon}$, ossia $x < -\dfrac{5}{\varepsilon} \vee x > \dfrac{5}{\varepsilon}$, intorno di ∞.

Abbiamo trovato un intorno di ∞ per cui è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

◆ ASINTOTI ORIZZONTALI

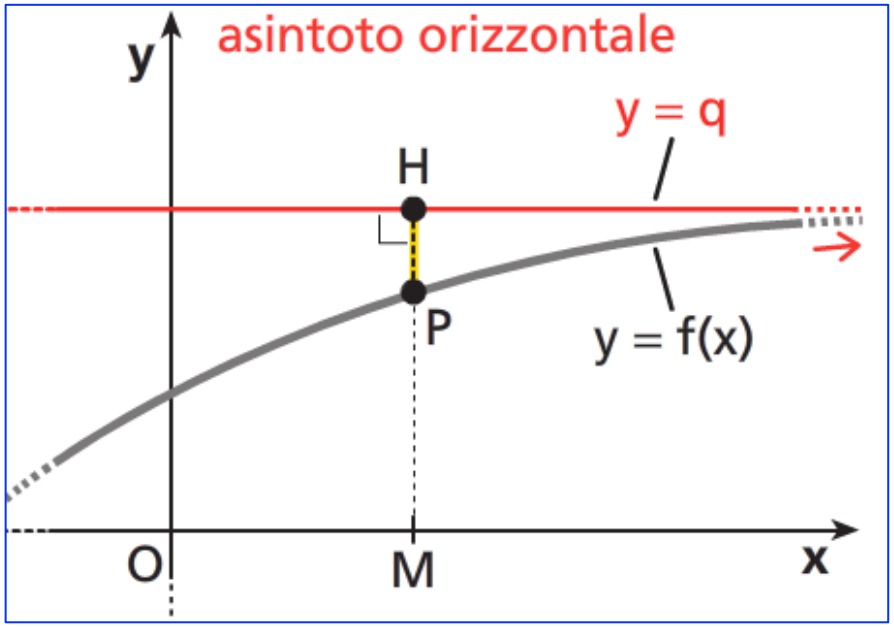
DEFINIZIONE

Asintoto orizzontale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica una delle condizioni

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = q \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = q \quad \text{o} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = q,$$

si dice che la retta $y = q$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione.



◆ SIGNIFICATO

$$\lim_{x \to +\infty} \overline{PH} = \lim_{x \to +\infty} |y - q| = 0$$

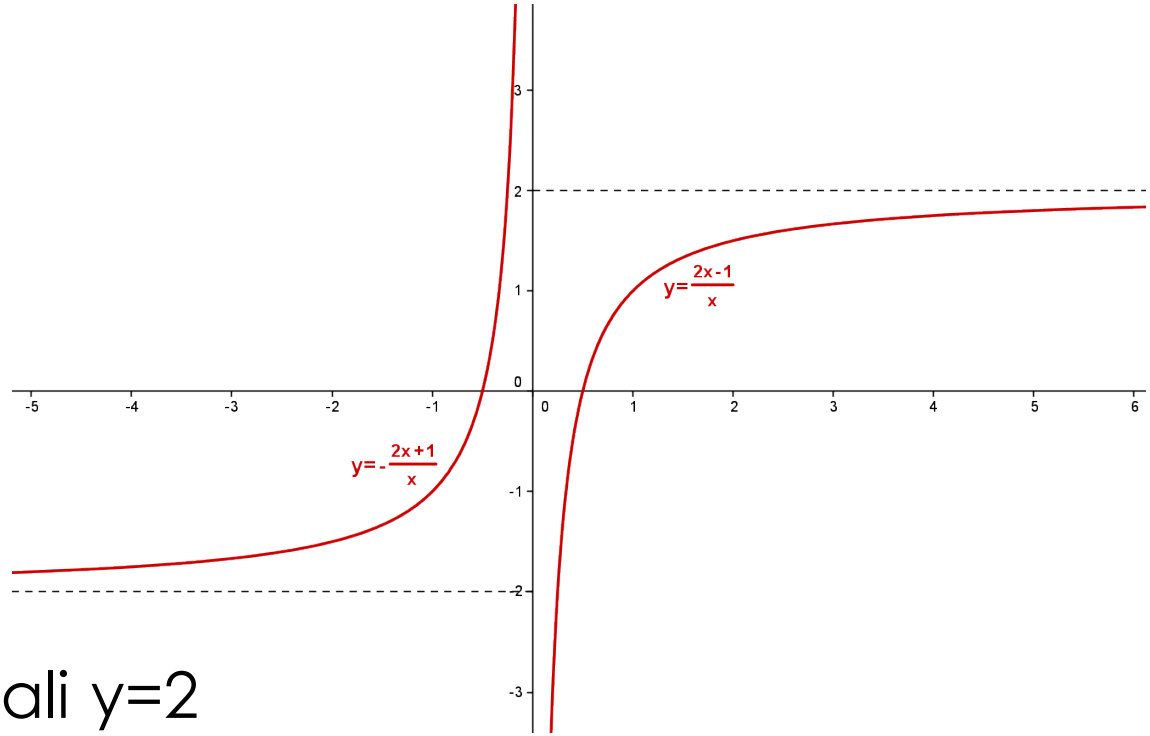
Quando x tende a +∞ (-∞), la distanza PH tende a zero (la funzione si avvicina sempre più alla retta y=q).

ESEMPIO

Le funzioni:

$$y = \frac{2x+1}{x} \qquad y = -\frac{2x+1}{x}$$

$$definite\ in\ D = \Re - \{0\}$$



hanno asintoti orizzontali y=2
e y=-2 perché:

$$\lim_{x\to-\infty} -\frac{2x+1}{x} = -2 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

Le funzioni hanno anche un asintoto verticale x=0 perché:

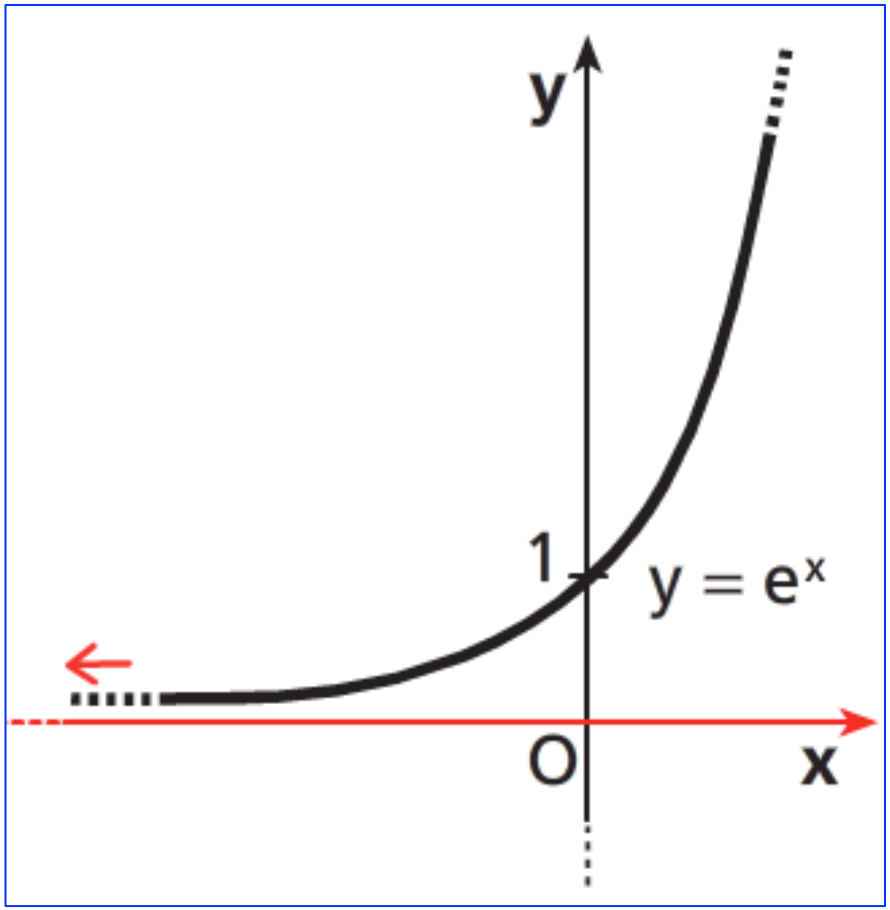
$$\lim_{x\to0^-} -\frac{2x+1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{2x+1}{x} = -\infty$$

ESEMPIO

La funzione:

$$y = e^x$$

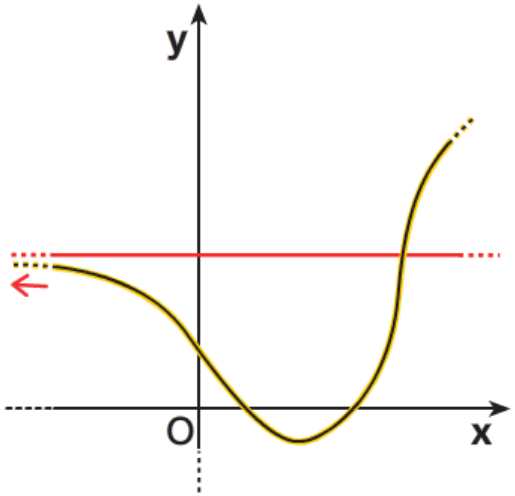
$$definita\ in\ D = \Re =]-\infty;+\infty[$$



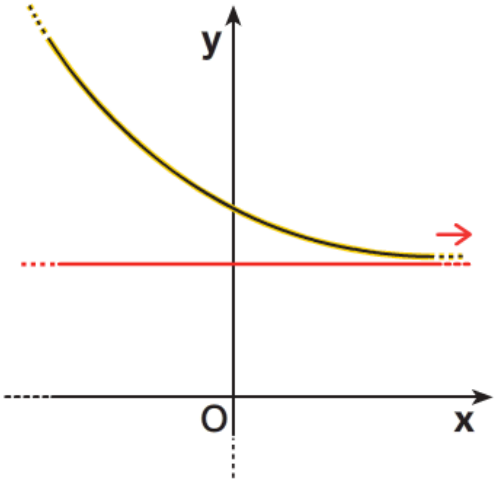
ha asintoto orizzontale sinistro y=0 perché:

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

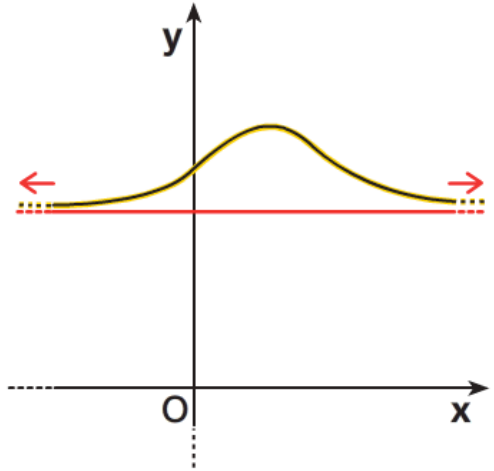
In generale, una funzione può avere anche due asintoti orizzontali, oppure un asintoto orizzontale sinistro o destro.



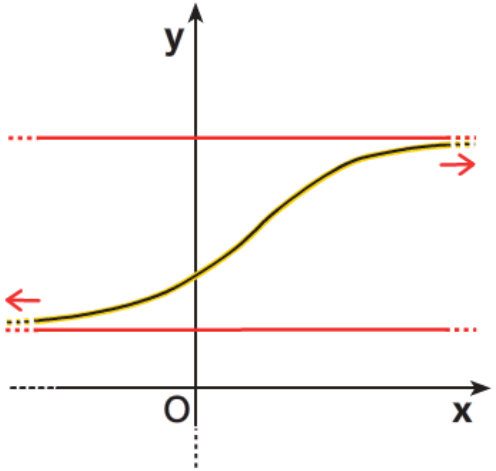
a. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to -\infty$.



b. Asintoto orizzontale soltanto per $x \to +\infty$.

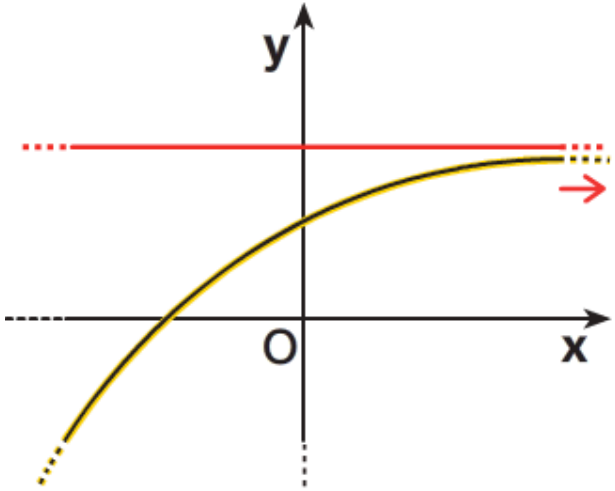


c. Asintoto orizzontale unico per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

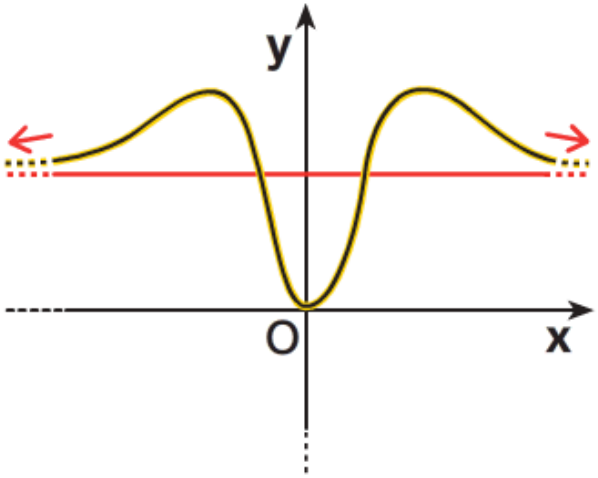


d. Due asintoti orizzontali diversi per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

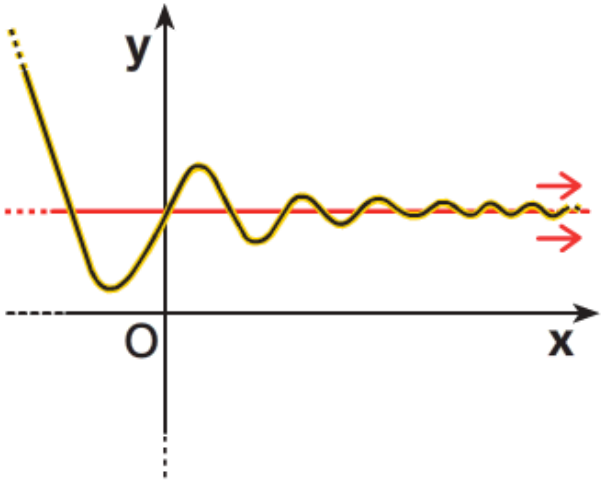
Rispetto all'asintoto orizzontale, il grafico della funzione può stare tutto "al di sopra" della retta o tutto "al di sotto", ma può anche intersecare l'asintoto stesso in un punto, due punti,…, infiniti punti.



a. Il grafico non interseca l'asintoto.



b. Il grafico interseca l'asintoto in due punti.



c. Il grafico interseca l'asintoto in infiniti punti.

IL LIMITE INFINITO DI UNA FUNZIONE PER X CHE TENDE ALL'INFINITO

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

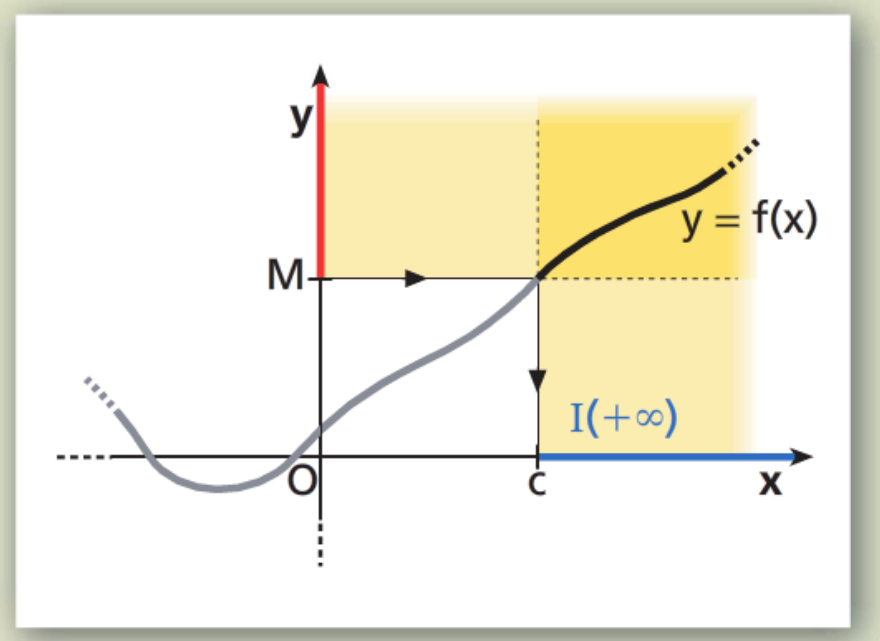
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti:

$f(x) > M$ per ogni $x \in I$.



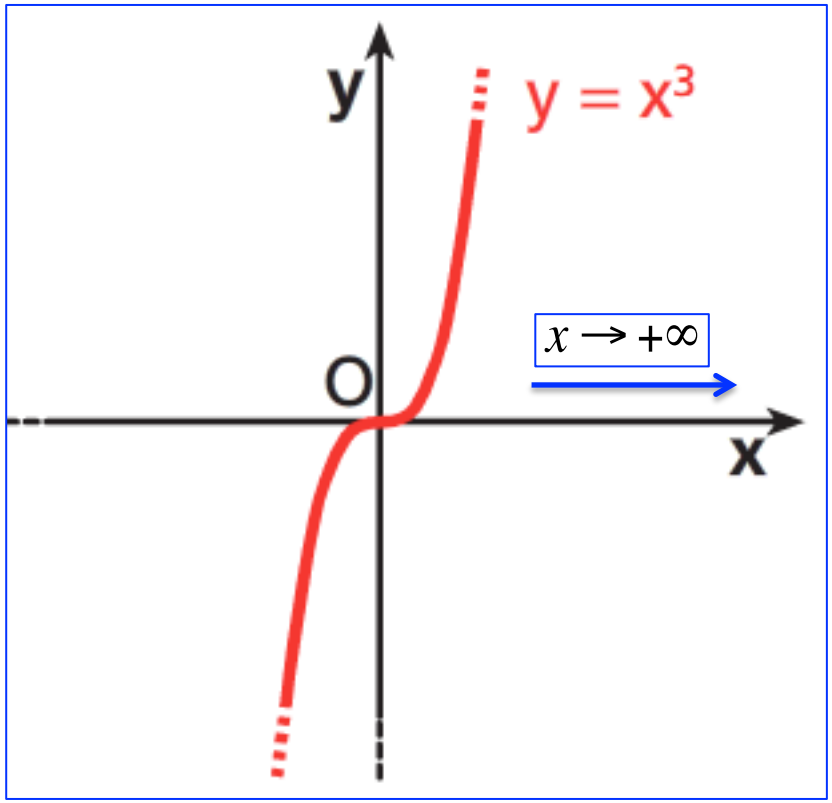
In maniera simbolica:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \,|\, f(x) > M, \forall x > c$$

ESEMPIO

Applicando la definizione, verificare che il:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$



Scelto $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti:

$x^3 > M$ per ogni x dell'intorno.

Applichiamo la radice cubica a entrambi i membri:

$x > \sqrt[3]{M}$.

L'insieme delle soluzioni è $]\sqrt[3]{M}; +\infty[$, che è l'intorno cercato.

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

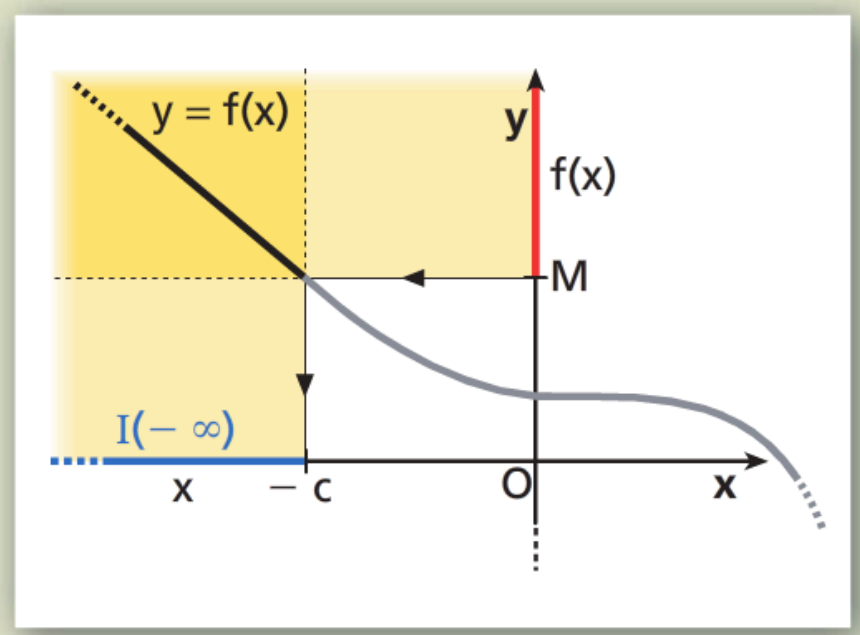
Limite $+\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti:

$$f(x) > M \text{ per ogni } x \in I.$$



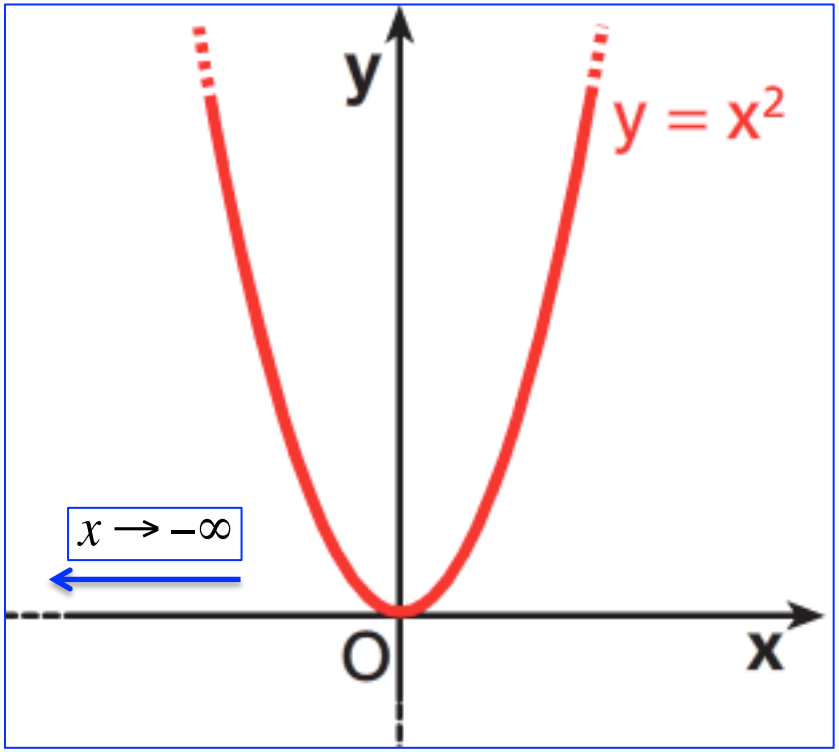
In maniera simbolica:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \mid f(x) > M, \forall x < -c$$

ESEMPIO

Applicando la definizione, verificare che il:

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$



Scelto $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $-\infty$ tale che risulti:

$x^2 > M$ per ogni x dell'intorno.

Questa disequazione di secondo grado è verificata per valori esterni alle radici $x = \pm\sqrt{M}$, ossia ha per soluzioni $x < -\sqrt{M} \vee x > +\sqrt{M}$.

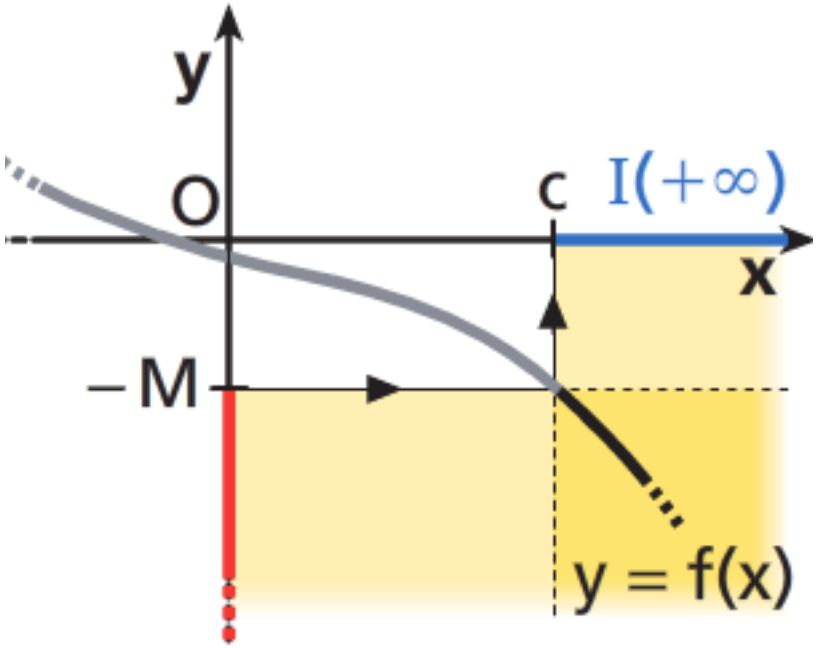
In particolare, se $x < -\sqrt{M}$, che rappresenta un intorno di $-\infty$, la disuguaglianza è vera, quindi il limite è verificato.

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $+\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.



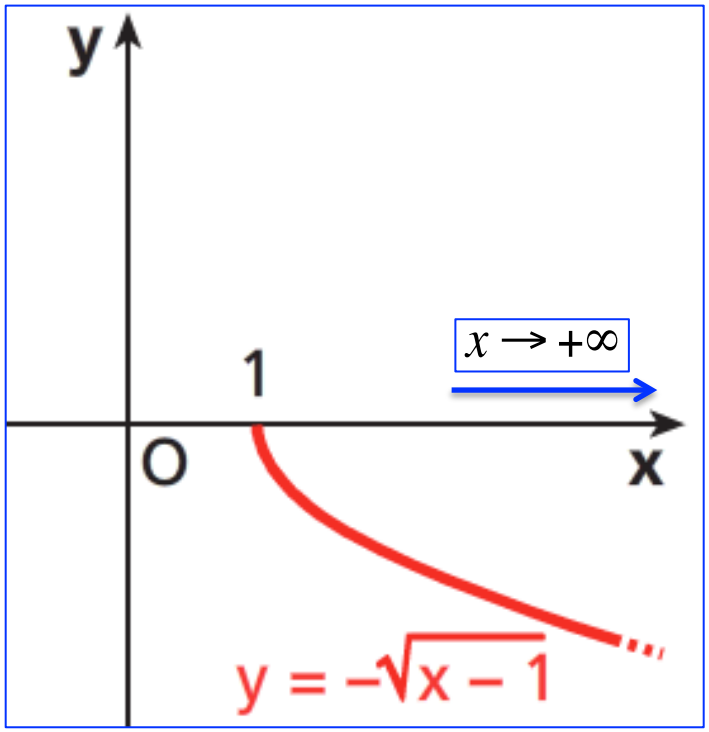
In maniera simbolica:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \mid f(x) < -M, \forall x > c$$

ESEMPIO

Applicando la definizione, verificare che il:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{x-1}\right)=-\infty$$



La funzione è definita in $D = [1; +\infty[$. Scelto un numero $M > 0$, dobbiamo determinare un intorno di $+\infty$ tale che risulti:

$-\sqrt{x-1} < -M$ per ogni x dell'intorno.

Moltiplichiamo entrambi i membri per -1 ed eleviamoli al quadrato:

$$\sqrt{x-1} > M \quad \rightarrow \quad x-1 > M^2 \quad \rightarrow \quad x > 1 + M^2.$$

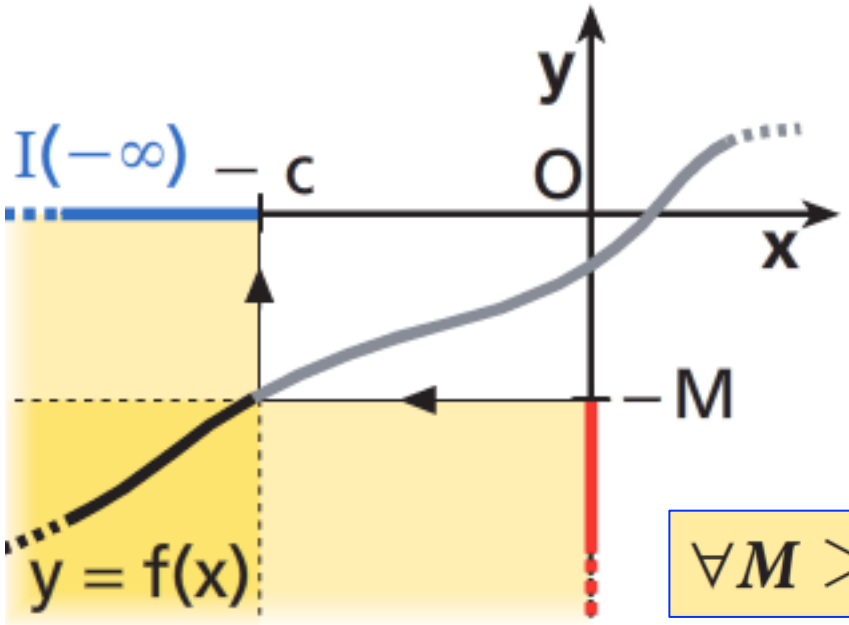
Le soluzioni sono date da $x > 1 + M^2$, che rappresenta un intorno di $+\infty$, quindi il limite è verificato.

◆ LA DEFINIZIONE

DEFINIZIONE

Limite $-\infty$ di una funzione per x che tende a $-\infty$

Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ e si scrive $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che risulti $f(x) < -M$ per ogni $x \in I$.



In maniera simbolica:

$$\forall M > 0 \quad \exists c > 0 \mid f(x) < -M, \forall x < -c$$

CONCLUSIONE SULLA DEFINIZIONE DI LIMITE

◆ DEFINIZIONE TOPOLOGICA DI LIMITE

La seguente definizione coincide con quelle date finora anche nei casi in cui x_0 o l siano uguali a $-\infty$ o a $+\infty$.

Definizione

Sia f(x) una funzione con dominio D e x_0 un punto di accumulazione di D. Si dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni intorno $I(l)$ esiste, in corrispondenza, un intorno $I(x_0)$ tale che:

$$\forall x \in D \cap I(x_0)$$

escluso al più x_0, si ha: $f(x) \in I(l)$

PRIMI TEOREMI SUI LIMITI

◆ Teorema unicità del limite

TEOREMA

Se per x che tende a x_0 la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale l, allora tale limite è unico.

Ipotesi

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
2. $l \in \Re$

Tesi

l *è unico*

dimostrazione

Dimostriamo la tesi per assurdo.

Supponiamo che la tesi sia falsa e cioè che l non sia unico. In tal caso dovrebbe esistere un numero reale l' diverso da l tale che risulti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l',\ l' \neq l.$$

Possiamo supporre $l < l'$ e, poiché nella definizione di limite possiamo scegliere ε arbitrariamente purché sia positivo, consideriamo:

$$\varepsilon < \frac{l' - l}{2}.$$

Applichiamo la definizione di limite in entrambi i casi. Dovrebbero esistere due intorni I e I' di x_0 tali che:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I,$$

$$|f(x) - l'| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \in I'.$$

Osserviamo che anche $I \cap I'$ è un intorno di x_0. In $I \cap I'$ devono valere contemporaneamente le due disequazioni, ossia:

$$\begin{cases} |f(x) - l| < \varepsilon \\ |f(x) - l'| < \varepsilon \end{cases} \qquad \forall x \in I \cap I'$$

Possiamo anche scrivere:

$$\begin{cases} l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \\ l' - \varepsilon < f(x) < l' + \varepsilon \end{cases}$$

Dal confronto delle disuguaglianze, ricordando che $l < l'$, risulta che

$$l' - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$

da cui segue:

$$l' - \varepsilon < l + \varepsilon.$$

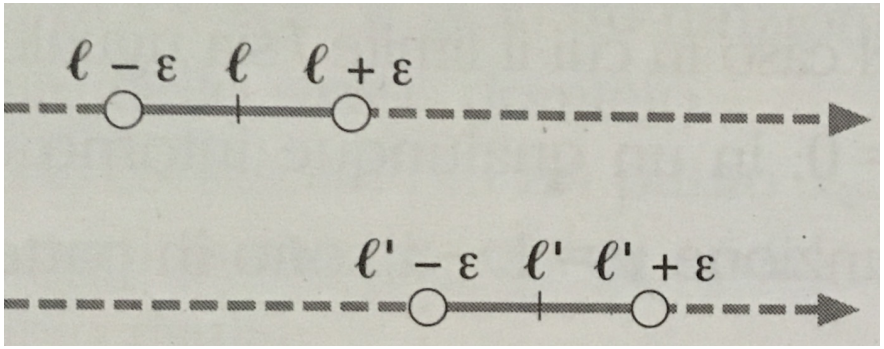
Ricavando ε otteniamo

$$-\varepsilon - \varepsilon < l - l' \quad \rightarrow \quad -2\varepsilon < l - l' \quad \rightarrow \quad 2\varepsilon > l' - l,$$

da cui $\varepsilon > \dfrac{l' - l}{2}$, contro l'ipotesi di $\varepsilon < \dfrac{l' - l}{2}$.

La supposizione che ci siano due limiti è falsa. Pertanto, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, il limite l è unico.

osservazione



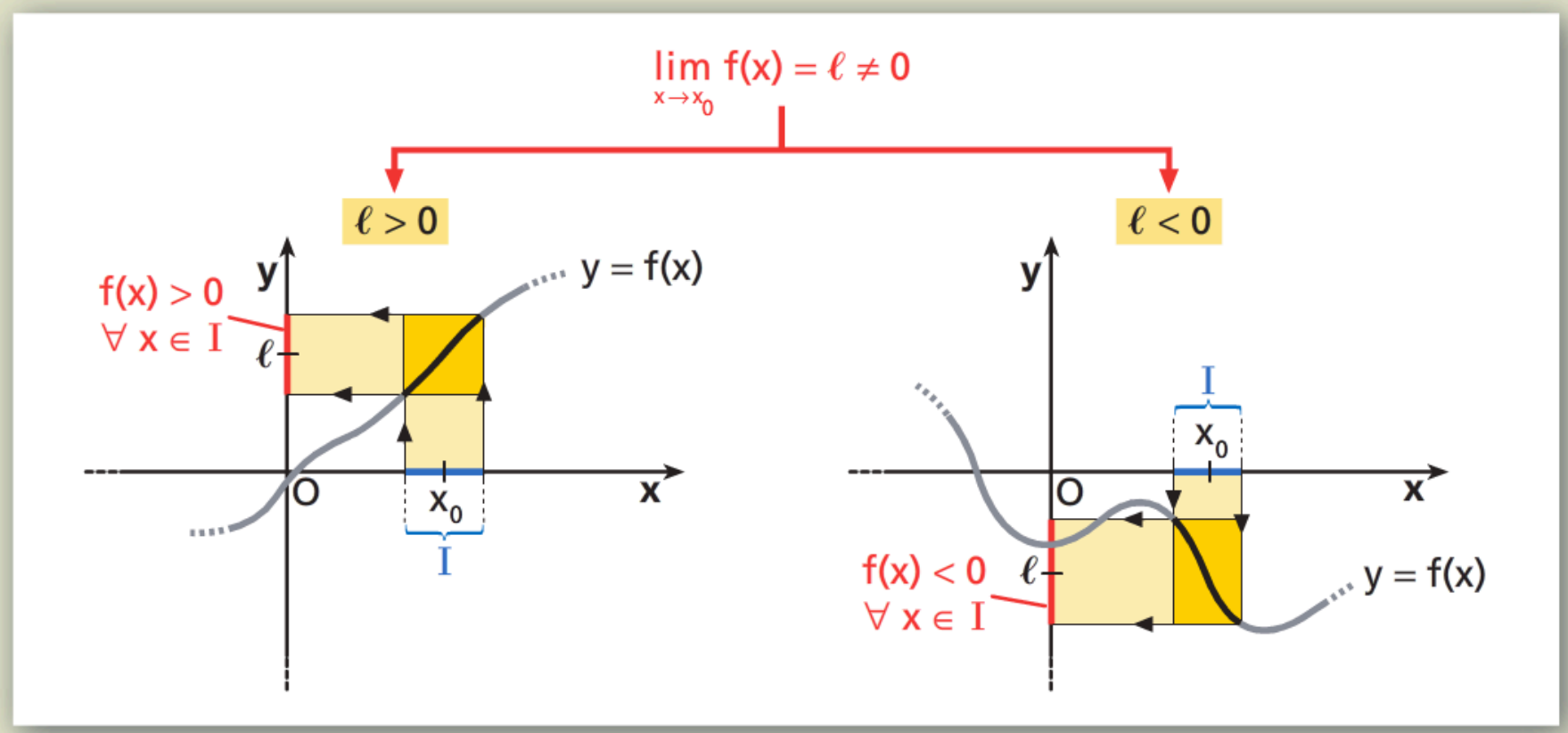
Se: $\varepsilon < \dfrac{l' - l}{2}$

Il valore di f(x) dovrebbe appartenere contemporaneamente a un intorno di l e a un intorno di l', che non hanno valori in comune. Questo è impossibile.

◆ Teorema della permanenza del segno

TEOREMA

Se il limite di una funzione per x che tende a x_0 è un numero l diverso da 0, allora esiste un intorno I di x_0 (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ e l sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.



Ipotesi	Tesi
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ 2. $l > 0$	$f(x) > 0$ *in un* intorno *di* x_0
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ 2. $l < 0$	$f(x) < 0$ *in un* intorno *di* x_0

dimostrazione

Dalla definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, scelto ε arbitrariamente positivo, deve essere:

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon.$$

Posto allora $\varepsilon = |l|$, si ha:

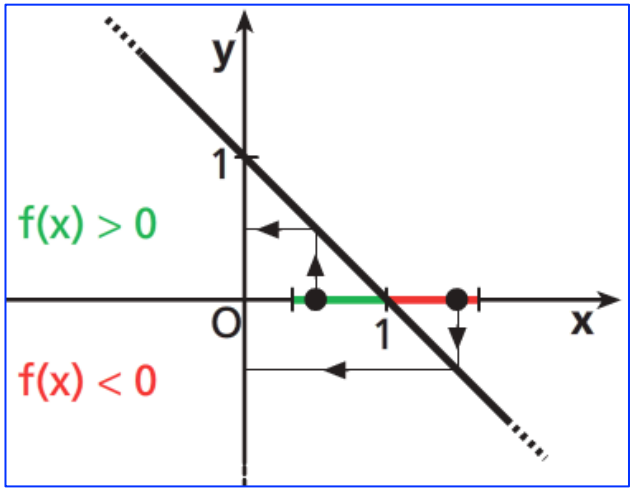
$$l - |l| < f(x) < l + |l|.$$

Se $l > 0$, allora $0 < f(x) < 2l \quad \rightarrow \quad f(x) > 0.$

Se $l < 0$, allora $2l < f(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) < 0.$

- Il teorema non è valido nel caso in cui il limite l sia uguale a 0.

Per esempio, consideriamo $\lim_{x \to 1} (1 - x) = 0$: in un qualunque intorno completo del punto 1, i valori assunti dalla funzione $y = 1 - x$ sono in parte positivi e in parte negativi.



Vale anche l'inverso del teorema della permanenza del segno (senza dimostrazione):

TEOREMA

Se una funzione $f(x)$ ammette limite finito l per x che tende a x_0 e in un intorno $I(x_0)$ di x_0, escluso al più x_0, è:

- positiva o nulla, allora $l \geq 0$;
- negativa o nulla, allora $l \leq 0$.

Ipotesi

Tesi

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I(x_0)$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$l \geq 0$

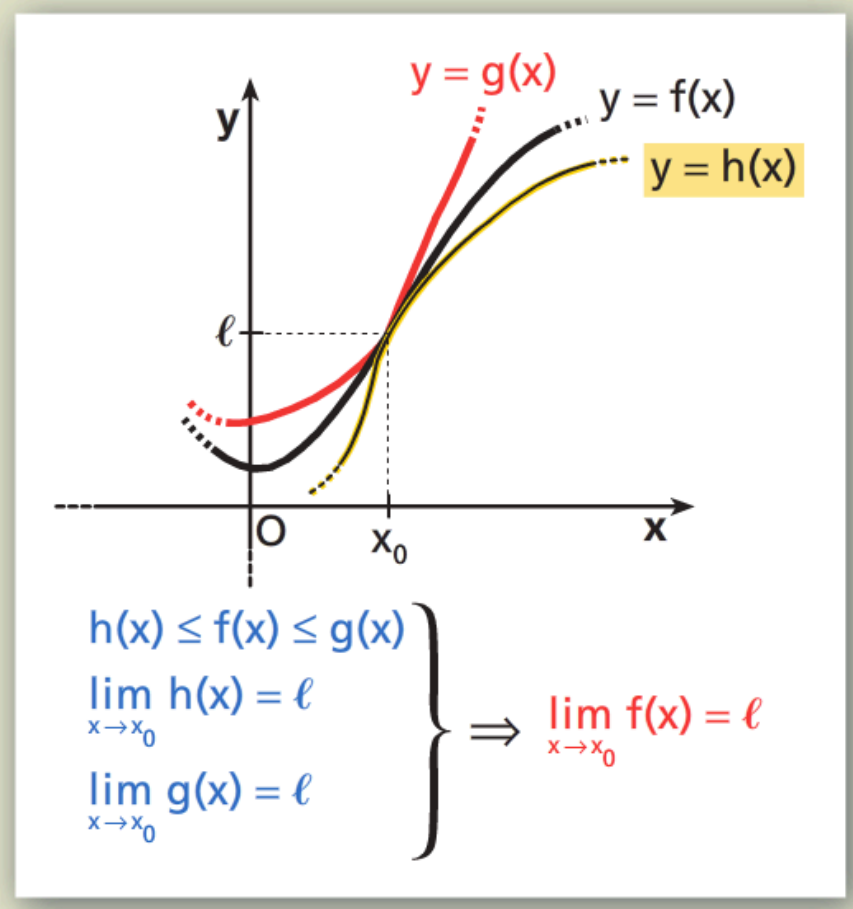
◆ Teorema del confronto

TEOREMA

Siano $h(x)$, $f(x)$ e $g(x)$ tre funzioni definite nello stesso dominio $D \subseteq \mathbb{R}$, escluso al più un punto x_0. Se in ogni punto diverso da x_0 del dominio risulta

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

e il limite delle due funzioni $h(x)$ e $g(x)$, per x che tende a x_0, è uno stesso numero l, allora anche il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 è uguale a l.



Ipotesi

1. $h(x) \le f(x) \le g(x) \quad \forall x \in D$
2. $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$
3. $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Tesi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

dimostrazione

Fissiamo $\varepsilon > 0$ a piacere. È vero che:

$|h(x) - l| < \varepsilon$, per ogni $x \in I_1 \cap D$, perché $h(x) \to l$ per $x \to x_0$;

$|g(x) - l| < \varepsilon$, per ogni $x \in I_2 \cap D$, perché $g(x) \to l$ per $x \to x_0$.

Le disuguaglianze valgono entrambe per ogni x del dominio appartenente all'intorno $I = I_1 \cap I_2$, escluso al più x_0. Quindi, per ogni $x \in I$, abbiamo:

$$l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon, \qquad l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon.$$

Tenendo conto della relazione fra le funzioni, abbiamo

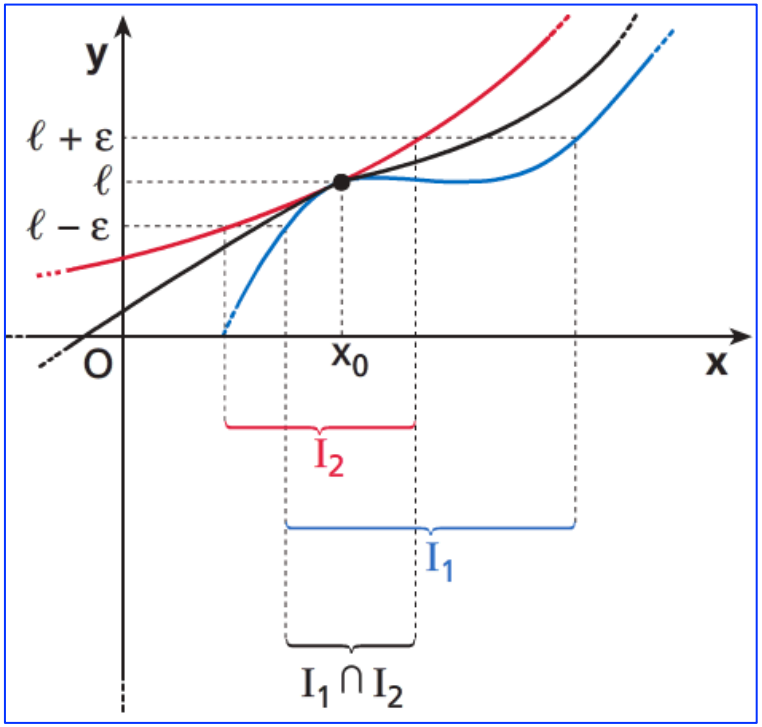
$$l-\varepsilon<h(x)\le f(x)\le g(x)<l+\varepsilon,$$

per ogni $x\in I$, che implica

$$l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon,$$

per ogni $x\in I$, ossia:

$$|f(x)-l|<\varepsilon,\ \forall x\in I.$$



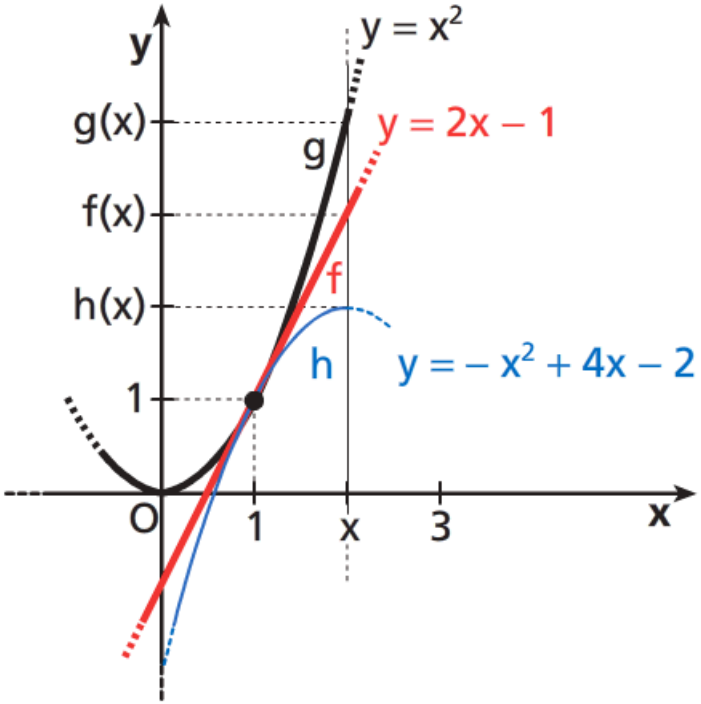
Quest'ultima relazione significa proprio che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l$$

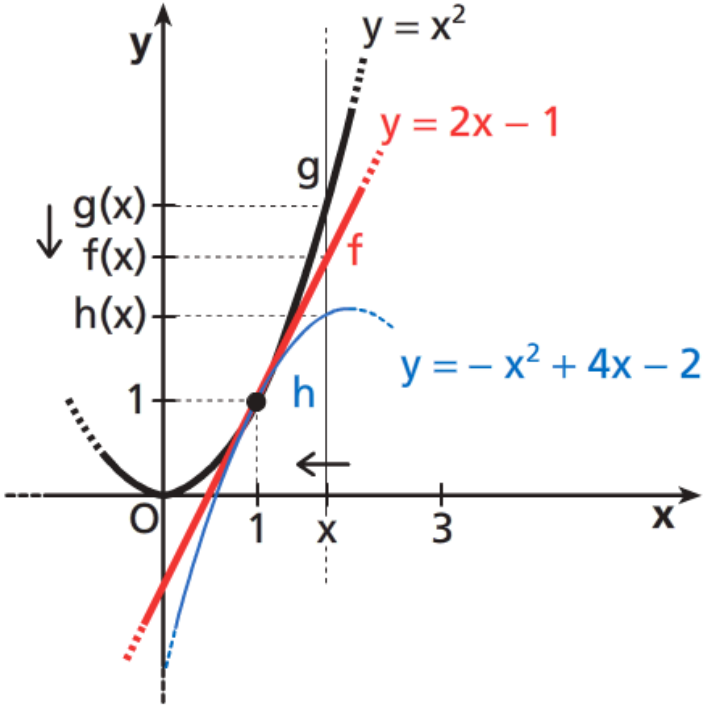
ESEMPIO

Sono date le funzioni

$$h(x) = -x^2 + 4x - 2, \qquad f(x) = 2x - 1, \qquad g(x) = x^2,$$



a. Consideriamo un valore x e i corrispondenti valori $h(x) \le f(x) \le g(x)$.



b. Se x tende a 1, $h(x)$ e $g(x)$ tendono a 1. Anche $f(x)$, essendo compreso fra $h(x)$ e $g(x)$, deve tendere a 1.

Noto che:

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 + 4x - 2) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1,$$

calcoliamo $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Possiamo osservare che per ogni valore x appartenente all'intervallo $]0; 3[$, i rispettivi valori delle tre funzioni h, f e g sono, nell'ordine, uno minore o uguale all'altro, ossia $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$.

Casi particolari

Si possono dimostrare i seguenti teoremi.

- Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in uno stesso intorno I di x_0, escluso al più x_0, se per ogni $x \neq x_0$ di I è

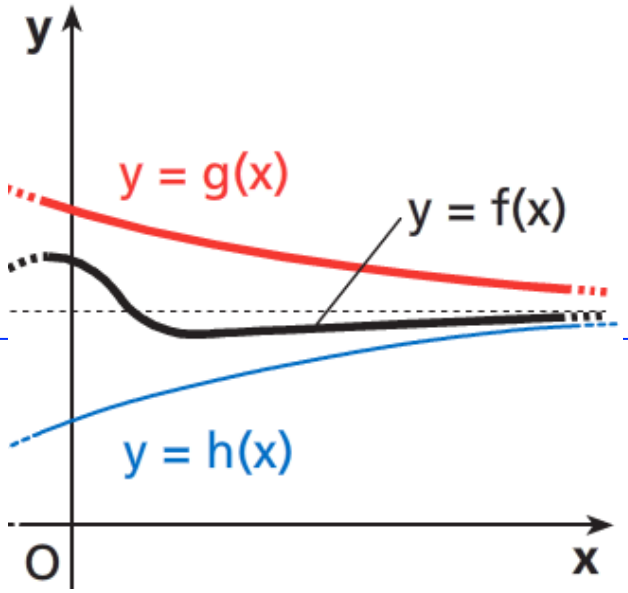
$$|f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

- Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in uno stesso intorno I di x_0, escluso al più x_0, se per ogni $x \neq x_0$ di I è:

$$|f(x)| \geq |g(x)| \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty,$$

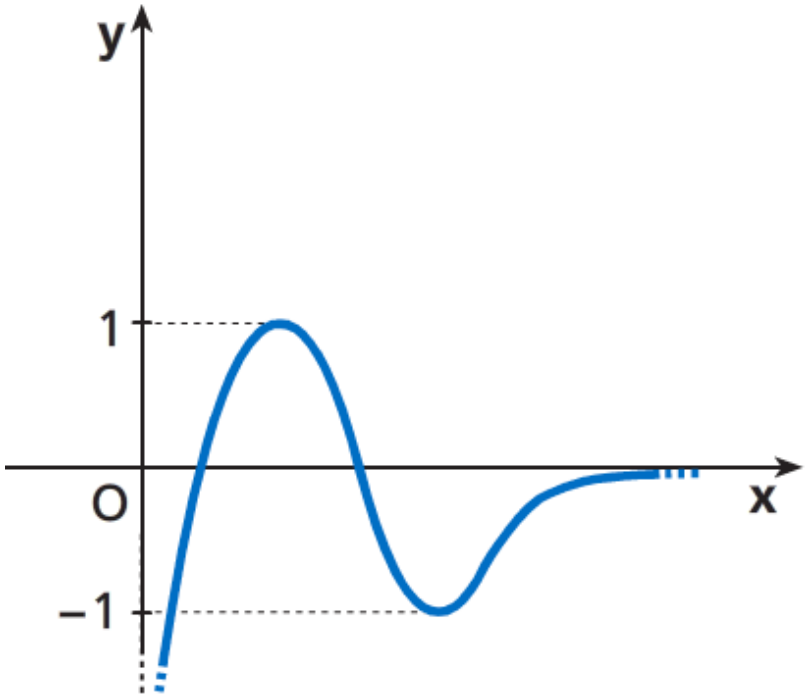
allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.



ESERCIZI

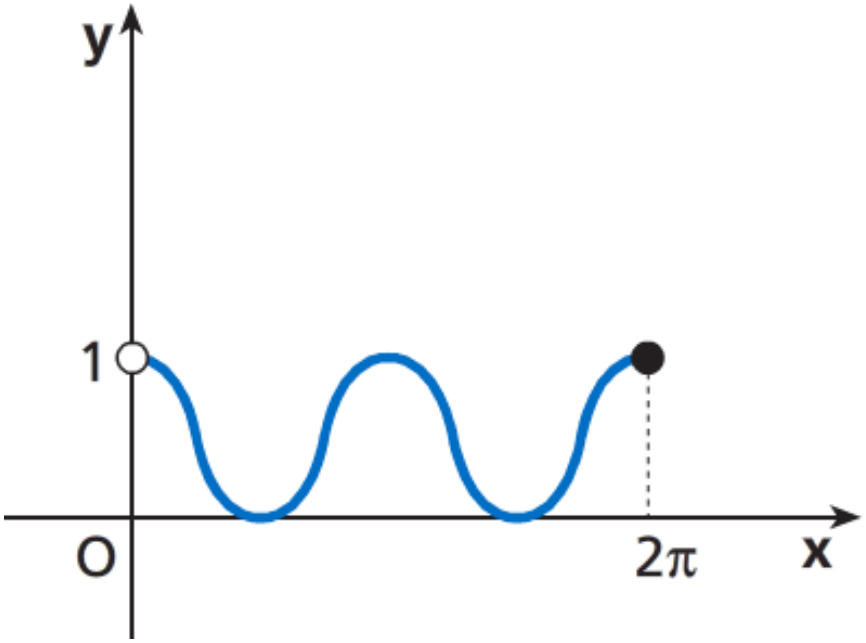
◆ Topologia della retta

Esercizio. Dai grafici dedurre il dominio e il codominio delle funzioni rappresentate. Indicare se sono intervalli limitati o illimitati e rappresentarli.



$dominio$	$codominio$
$x > 0$	$y \leq 1$

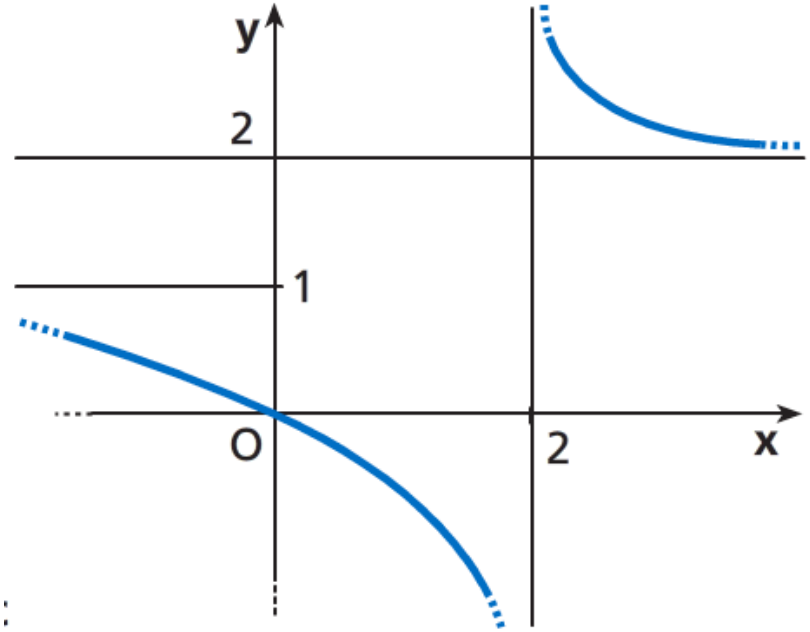
intervallo aperto
illimitato superiormente
]0;+∞[0<x<+∞



$dominio$	$codominio$
$0 < x \leq 2\pi$	$0 \leq y \leq 1$

intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

$]0;2\pi]$ $0<x\leq 2\pi$



$dominio$	$codominio$
$x \neq 2$	$y < 1 \wedge y > 2$

intervallo aperto illimitato inferiormente e superiormente

$]-\infty;2[\vee]2;+\infty[$

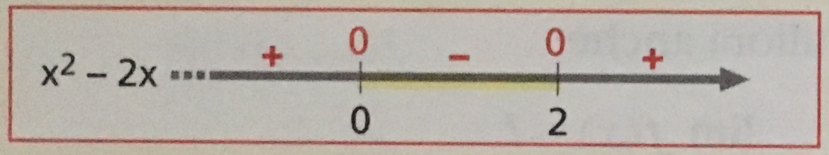
$-\infty<x<2 \vee 2<x<+\infty$

Esercizio. Dati i seguenti insiemi, stabilire se sono intervalli limitati o illimitati:

$$A = \left\{ x \in \Re : x^2 - 2x \leq 0 \right\} \qquad B = \left\{ x \in \Re : x^2 - x - 20 \geq 0 \right\}$$

a) Risolviamo la disequazione:

$x^2 - 2x \leq 0 \quad \rightarrow \quad x(x-2) \leq 0$



$0 \leq x \leq 2$

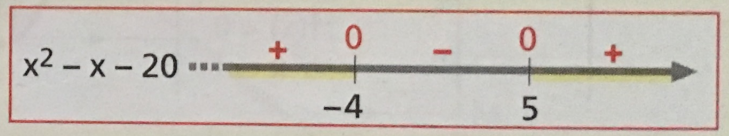
$A = [0;\ 2]$.

È un intervallo limitato.

b) Risolviamo la disequazione:

$x^2 - x - 20 \geq 0$

$x^2 - x - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \begin{cases} -4 \\ 5 \end{cases}$



$x \leq -4 \vee x \geq 5$

$B =]-\infty;\ -4] \cup [5;\ +\infty[$.

B non è un intervallo ma l'unione di due intervalli illimitati.

ESERCIZIO GUIDA

a) Dato l'insieme

$$E = \left\{ x \,|\, x = \frac{2n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\},$$

verifichiamo che 2 e 3 sono rispettivamente l'estremo inferiore e quello superiore dell'insieme, indicando anche se sono il minimo e il massimo.

b) Dato l'insieme

$$E = \left\{ x \,|\, x = \frac{n^2-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\},$$

verifichiamo che è illimitato superiormente, ossia che il suo estremo superiore è $+\infty$.

a) Verifichiamo che l'estremo inferiore di E è 2.

1. $\forall x \in E$ deve essere $x \geq 2$, ossia:

$$\frac{2n+1}{n} \geq 2 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-2n}{n} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n} \geq 0 \text{ vera } \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

2. 2 non appartiene all'insieme. Infatti l'equazione

$$\frac{2n+1}{n} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-2n}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{n} = 0$$

è impossibile.

Perché 2 sia l'estremo inferiore, $\forall \varepsilon > 0$ la disequazione $x < 2 + \varepsilon$ deve ammettere almeno una soluzione in E, ossia deve esistere almeno un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che

$$\frac{2n+1}{n} < 2 + \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-2n-\varepsilon n}{n} < 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1-\varepsilon n}{n} < 0,$$

ed essendo $n > 0$ si ha:

$$1 - \varepsilon n < 0 \quad \rightarrow \quad -\varepsilon n < -1 \quad \rightarrow \quad \varepsilon n > 1 \quad \rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Per qualsiasi valore di n maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$ la disequazione è verificata.

Le condizioni dei punti 1 e 2 sono entrambre verificate, quindi 2 è l'estremo inferiore di E.

Consideriamo ora il valore 3.

1. $\forall x \in E$ deve essere $x \leq 3$, ossia:

$$\frac{2n+1}{n} \leq 3 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-3n}{n} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-n+1}{n} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{n-1}{n} \geq 0.$$

La disequazione è verificata per $n \geq 1$.
È quindi vero che $x \leq 3 \; \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. $3 \in E$ perché:

$$\frac{2n+1}{n} = 3 \quad \rightarrow \quad \frac{2n+1-3n}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-n+1}{n} = 0 \quad \rightarrow \quad n = 1.$$

Per $n = 1$ si ha che $x = 3$.

Verificate le due condizioni precedenti, possiamo concludere che $x = 3$ è il massimo di E.

b) Perché l'insieme sia superiormente illimitato, $\forall k > 0$ deve esistere almeno un elemento dell'insieme che superi k, ossia la disequazione $\frac{n^2-1}{n} > k$ deve essere verificata almeno per un valore di n.

Risolviamo la disequazione:

$$\frac{n^2-1}{n} > k \quad \rightarrow \quad \frac{n^2-1-nk}{n} > 0.$$

Essendo $n > 0$, anche il numeratore deve essere positivo:

$$n^2 - nk - 1 > 0 \text{ vera per } n < \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \vee n > \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}.$$

Poiché $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, consideriamo solo le soluzioni positive: per ogni $n > \frac{k+\sqrt{k^2+1}}{2}$ il corrispondente elemento dell'insieme è maggiore del k fissato, quindi l'insieme ha per estremo superiore $+\infty$.

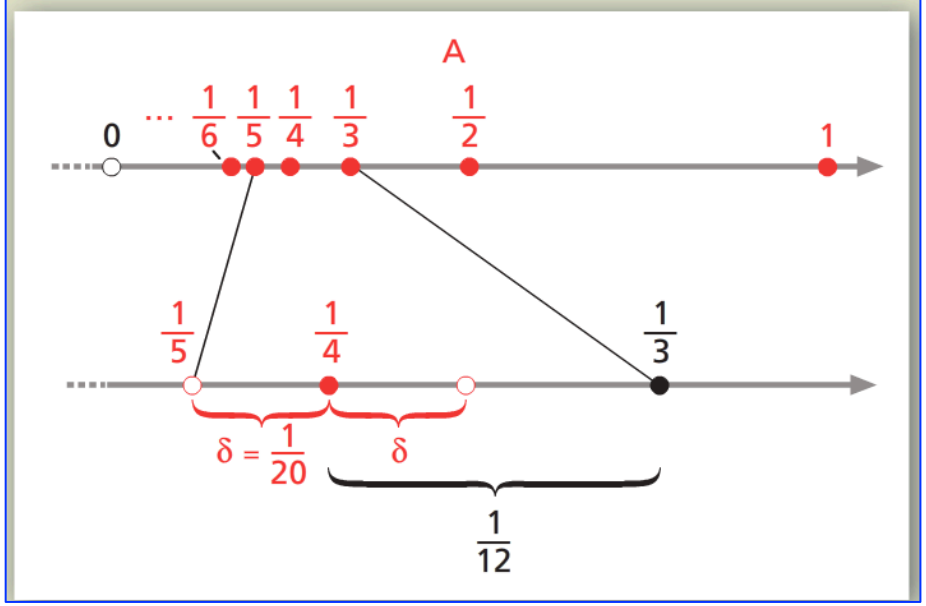
ESERCIZIO GUIDA

Dato l'insieme $A = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$, dopo averne rappresentato alcuni elementi, ne scegliamo uno a caso e verifichiamo che è un punto isolato.

Determiniamo alcuni elementi di A costruendo la seguente tabella.

n	x
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$

Rappresentiamo sulla retta orientata gli elementi di A trovati.



Verifichiamo, per esempio, che $\frac{1}{4}$ è un punto isolato. Dobbiamo trovare un intorno $\left]\frac{1}{4} - \delta; \frac{1}{4} + \delta\right[$ che non contenga altri elementi di A. Dalla figura possiamo osservare che l'elemento di A più vicino a $\frac{1}{4}$ è $\frac{1}{5}$. Infatti la distanza di $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, mentre la distanza di $\frac{1}{4}$ da $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Se poniamo $\delta = \frac{1}{20}$, otteniamo l'intervallo $\left]\frac{1}{4} - \frac{1}{20}; \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right[= \left]\frac{1}{5}; \frac{3}{10}\right[$ che è un intorno di $\frac{1}{4}$ e non contiene altri punti di A, dunque $\frac{1}{4}$ è un punto isolato di A.

ESERCIZIO GUIDA

Dato l'insieme $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} - \{0\}\right\}$, verifichiamo che 0 è un punto di accumulazione per A.

Prendiamo un qualunque intorno di 0, di generica apertura δ: $]-\delta; \delta[$. Mostriamo che esistono infiniti valori di A che appartengono a tale intorno.

Affinché un punto di A appartenga a $]-\delta; \delta[$, deve valere:

$$-\delta < \frac{1}{n} < \delta.$$

Poiché $\frac{1}{n} > 0$, è anche $\frac{1}{n} > -\delta$, quindi basta considerare:

$$\frac{1}{n} < \delta.$$

Passiamo alla disuguaglianza fra i reciproci (essendo n e δ numeri positivi):

$$n > \frac{1}{\delta}.$$

Tutti gli elementi di A con $n > \frac{1}{\delta}$ appartengono a $]-\delta; \delta[$.

Per esempio, scegliendo $\delta = 0{,}1$, i valori di n che rendono vera $n > \frac{1}{\delta} = \frac{1}{0{,}1} = 10$ sono: 11, 12, 13, … e quindi all'intervallo $]-0{,}1; 0{,}1[$ appartengono i seguenti elementi di A: $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots$

Scegliendo un qualsiasi altro valore per δ, esistono sempre infiniti numeri naturali maggiori di $\frac{1}{\delta}$, quindi 0 è un punto di accumulazione per A.

◆ Verifica del limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione di limite, verifichiamo $\lim_{x \to 3} \frac{x+3}{x} = 2$.

Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno completo di 3 per ogni x del quale (escluso al più 3) si ha $\left| \frac{x+3}{x} - 2 \right| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

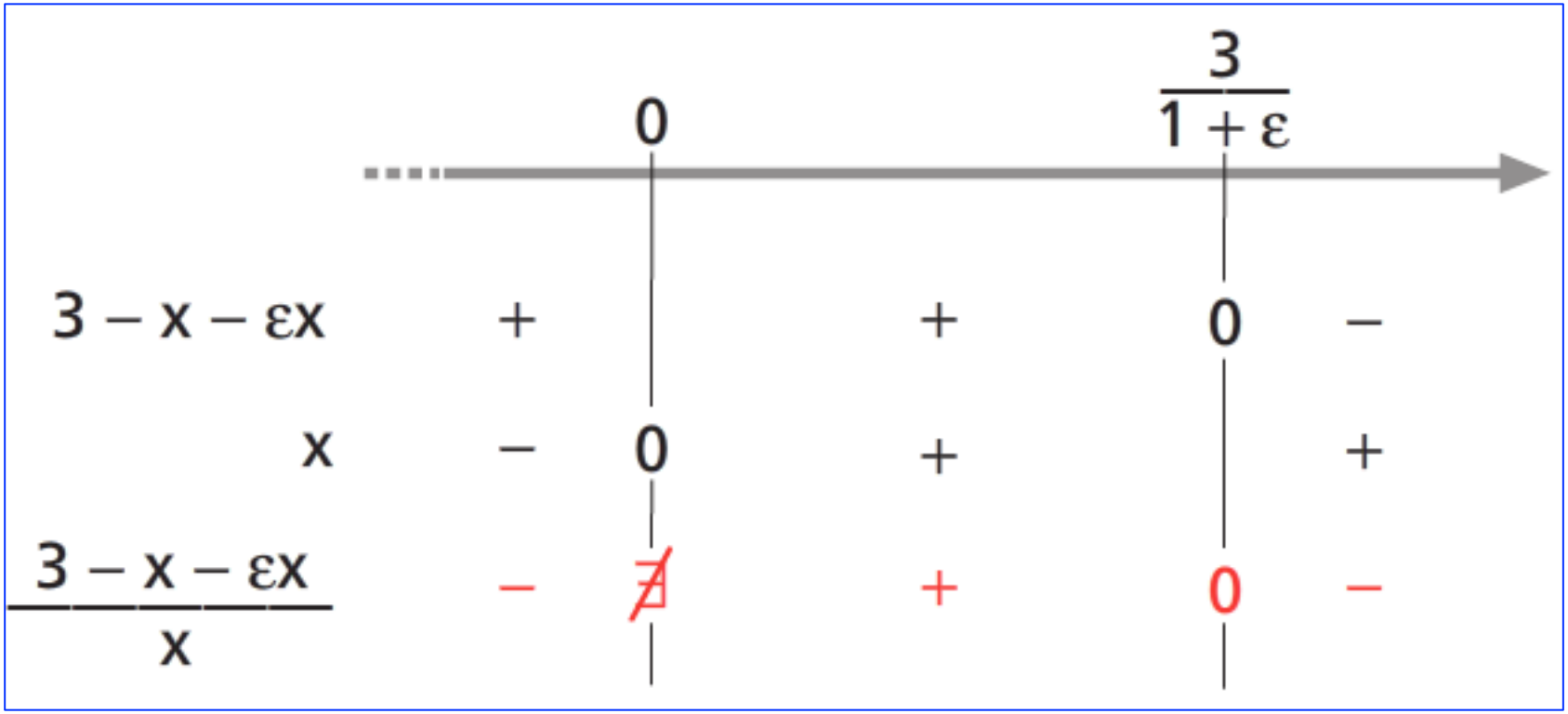
$$\left| \frac{x+3}{x} - 2 \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \left| \frac{3-x}{x} \right| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3-x}{x} < \varepsilon \\ \frac{3-x}{x} > -\varepsilon \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{3-x-\varepsilon x}{x} < 0 \\ \frac{3-x+\varepsilon x}{x} > 0 \end{cases}$$

Prima disequazione

Numeratore: $3-x-\varepsilon x > 0 \rightarrow -x(1+\varepsilon) > -3 \rightarrow$

$\rightarrow x(1+\varepsilon) < 3 \rightarrow x < \frac{3}{1+\varepsilon}$.

Denominatore: $x > 0$.



La prima disequazione ha per soluzioni:

$$x < 0 \vee x > \frac{3}{1+\varepsilon}.$$

Seconda disequazione

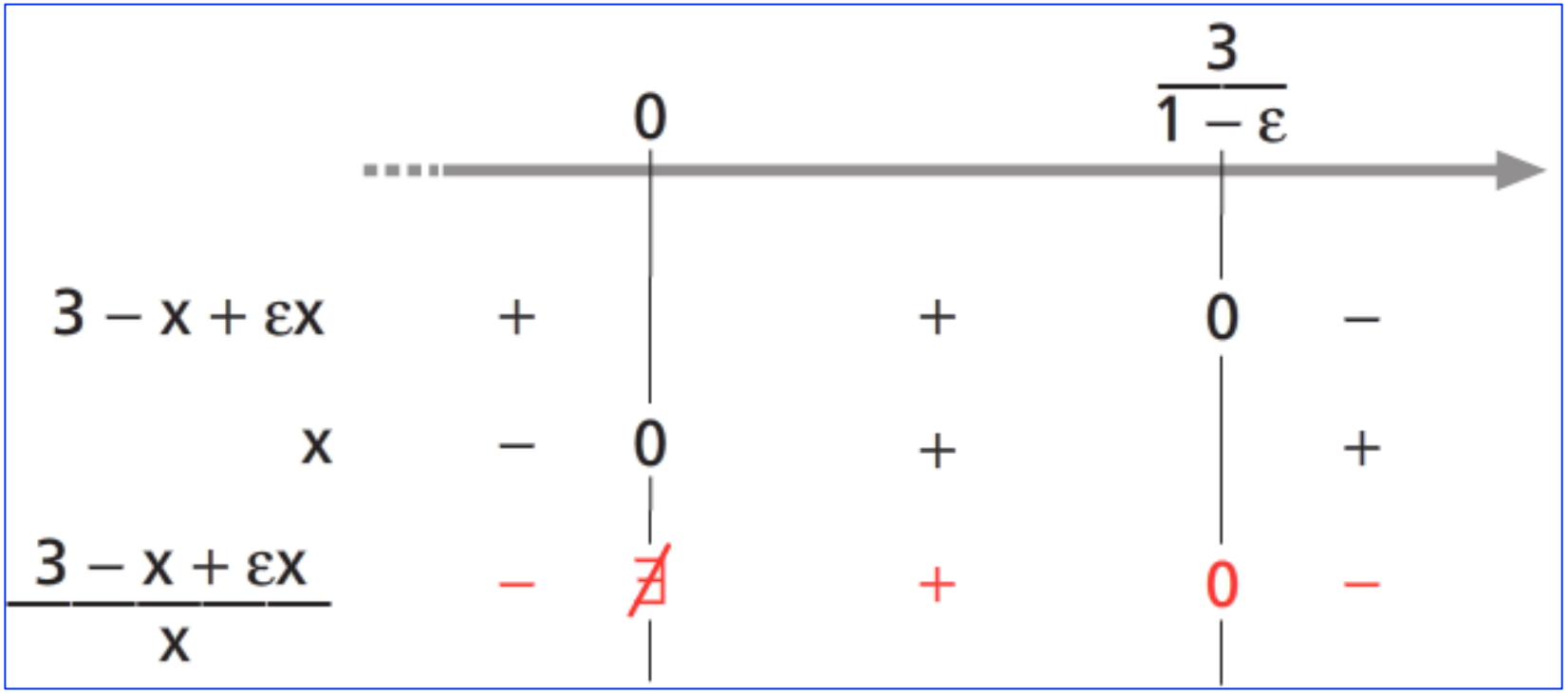
Numeratore: $3-x+\varepsilon x>0 \rightarrow -x(1-\varepsilon)>-3 \rightarrow$

$\rightarrow x(1-\varepsilon)<3.$

Per risolvere questa disequazione occorre dividere entrambi i membri per $1-\varepsilon$. Poiché ε è arbitrariamente piccolo possiamo supporre $\varepsilon<1$, ossia $1-\varepsilon>0$.

Quindi $x<\dfrac{3}{1-\varepsilon}$.

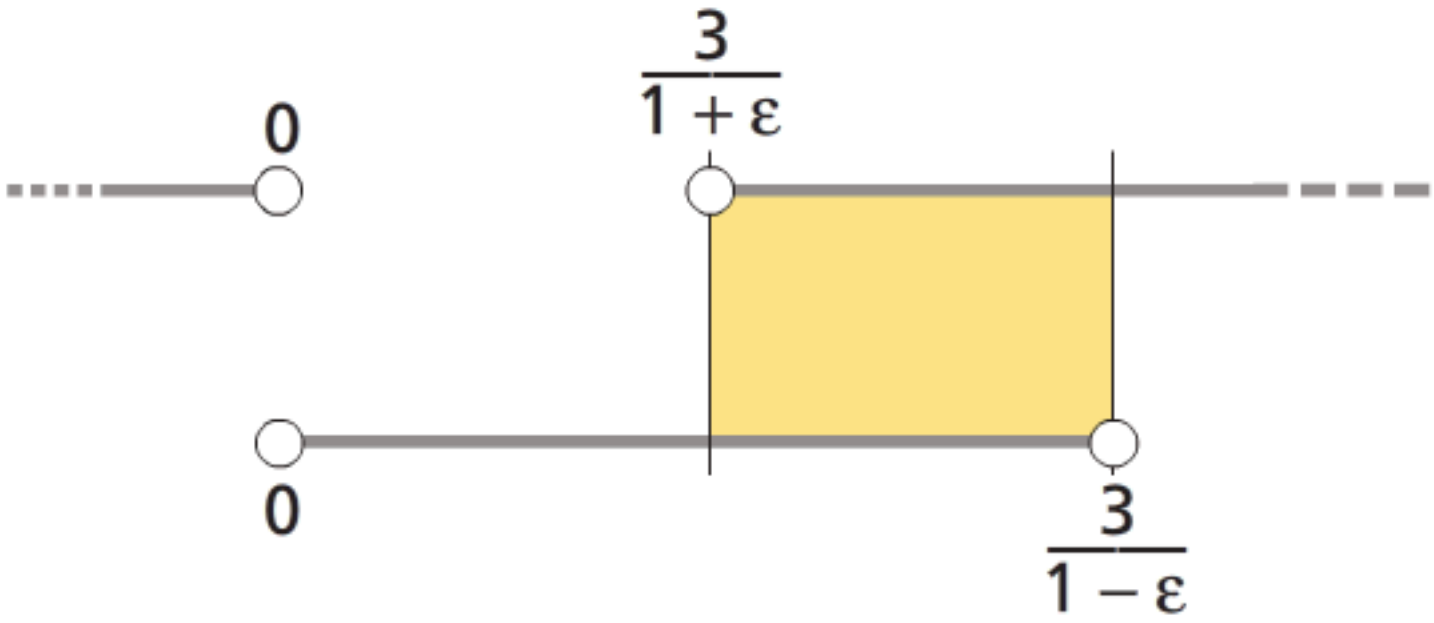
Denominatore: $x>0$.



La seconda disequazione ha per soluzioni:

$$0 < x < \frac{3}{1-\varepsilon}.$$

Il quadro delle soluzioni del sistema è il seguente:



Le soluzioni sono: $\frac{3}{1+\varepsilon} < x < \frac{3}{1-\varepsilon}$.

Verifichiamo che l'intervallo trovato è un intorno di 3. Per farlo, controlliamo che per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere risulti:

$$\frac{3}{1+\varepsilon} < 3 < \frac{3}{1-\varepsilon}.$$

- $\frac{3}{1+\varepsilon} < 3 \Leftrightarrow 3 < 3 + 3\varepsilon$

  sempre vera;

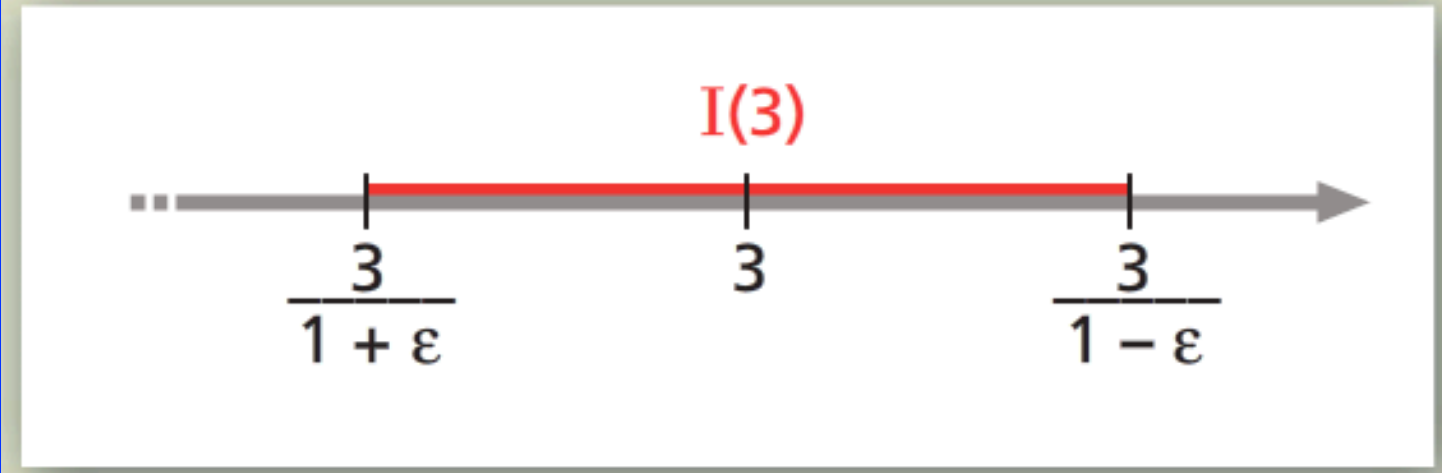
- $3 < \frac{3}{1-\varepsilon} \Leftrightarrow 3 - 3\varepsilon < 3$

  sempre vera nell'ipotesi fatta, $\varepsilon < 1$.

Possiamo quindi dire che entrambe le disuguaglianze sono vere per ogni $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Poiché l'intervallo $\left]\frac{3}{1+\varepsilon}; \frac{3}{1-\varepsilon}\right[$ rappresenta un intorno completo di 3, il limite è verificato.

Graficamente otteniamo:



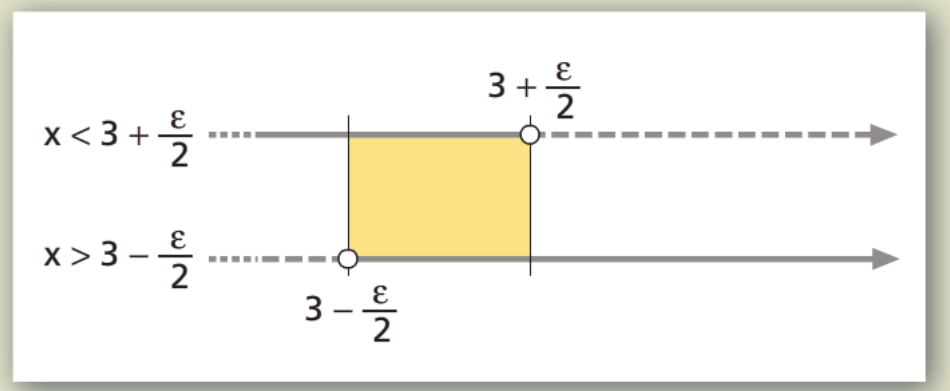
ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione di limite verifichiamo che *non* vale $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 7$

Scelto un $\varepsilon > 0$, risolviamo la disequazione $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$.
La disequazione data è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x - 6 < \varepsilon \\ 2x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x < 6 + \varepsilon \\ 2x > 6 - \varepsilon \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6 + \varepsilon}{2} \\ x > \dfrac{6 - \varepsilon}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 3 + \dfrac{\varepsilon}{2} \\ x > 3 - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$



L'intervallo $\left]3 - \frac{\varepsilon}{2}; 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$, può non rappresentare un intorno completo di 4 per *qualsiasi* valore di ε.

Per esempio se $\varepsilon = \frac{1}{2}$, l'intervallo $\left]3 - \frac{1}{4}; 3 + \frac{1}{4}\right[$ non è un intorno di 4. Quindi l'uguaglianza $\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 7$ è falsa. L'intervallo $\left]3 - \frac{\varepsilon}{2}; 3 + \frac{\varepsilon}{2}\right[$ è invece *sempre* un intorno completo di 3 di raggio $\frac{\varepsilon}{2}$, pertanto il limite corretto è $\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7$.

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione di limite, verifichiamo che $\lim_{x \to 2^-} (3^x - 1) = 8$

Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno sinistro di 2 per ogni x del quale si ha $|(3^x - 1) - 8| < \varepsilon$. Risolviamo la disequazione:

$$|(3^x - 1) - 8| < \varepsilon \quad \rightarrow \quad -\varepsilon < 3^x - 9 < \varepsilon \quad \rightarrow \quad 9 - \varepsilon < 3^x < 9 + \varepsilon.$$

Poiché la funzione logaritmo in base 3 è strettamente crescente, possiamo applicarla a tutti i membri della disequazione e conservare il verso della disuguaglianza

$$\log_3 (9 - \varepsilon) < \log_3 3^x < \log_3 (9 + \varepsilon).$$

Poiché pensiamo a valori di ε scelti piccoli a piacere, è lecito considerare $\varepsilon < 9$, in modo che sia definito $\log_3 (9 - \varepsilon)$.

Per la definizione di logaritmo si ha $\log_3 3^x = x$, quindi otteniamo:

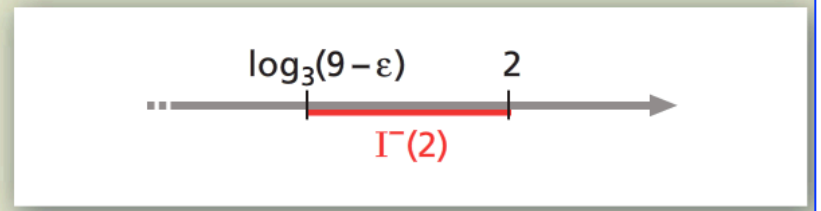
$$\log_3 (9 - \varepsilon) < x < \log_3 (9 + \varepsilon).$$

Osserviamo che:

$$\log_3 (9 - \varepsilon) < \log_3 9 \quad \rightarrow \quad \log_3 (9 - \varepsilon) < 2$$

$$\log_3 (9 + \varepsilon) > \log_3 9 \quad \rightarrow \quad \log_3 (9 + \varepsilon) > 2.$$

Quindi la disequazione è verificata in un intorno completo di 2. In particolare, è verificata in un suo sottoinsieme, ossia l'intorno sinistro di 2: $]\log_3 (9 - \varepsilon); 2[$. Pertanto il limite è verificato.



ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la funzione $f(x) = 3x - 5$ è continua nel punto $x_0 = 2$.

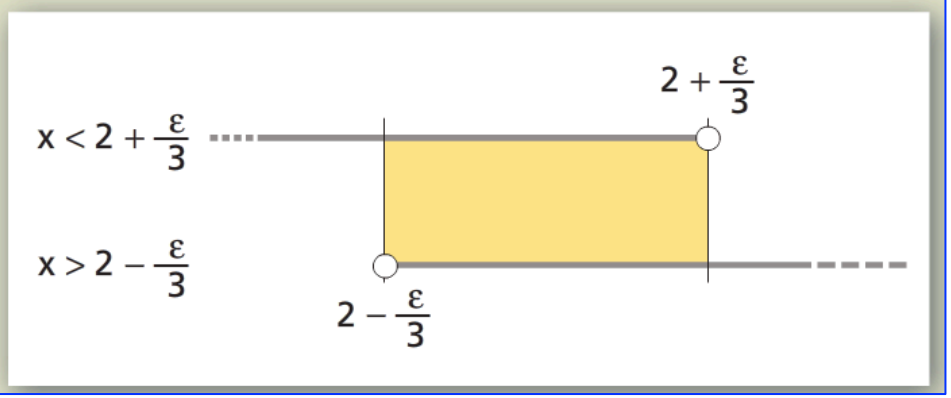
Mostriamo che vale $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$, ossia $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 5) = 1$.

Scelto $\varepsilon > 0$ risolviamo la disequazione $|(3x - 5) - 1| < \varepsilon$ e verifichiamo che fra le sue soluzioni vi sia un intorno di 2:

$$|3x - 6| < \varepsilon \rightarrow \begin{cases} 3x - 6 < \varepsilon \\ 3x - 6 > -\varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x < 6 + \varepsilon \\ 3x > 6 - \varepsilon \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{6 + \varepsilon}{3} \\ x > \dfrac{6 - \varepsilon}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{3} \\ x > 2 - \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Le soluzioni sono: $2 - \dfrac{\varepsilon}{3} < x < 2 + \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Poiché l'intervallo $\left]2 - \dfrac{\varepsilon}{3}; 2 + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$ rappresenta un intorno completo di 2, il limite è verificato e quindi la funzione data è continua nel punto considerato.



Esercizio. Applicando la definizione, verificare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1-\ln x} = 0^+$$

b) Dobbiamo verificare che, scelto $\varepsilon > 0$, esiste un intorno destro di 0 per ogni x del quale si ha $0 \le \frac{1}{1-\ln x} - 0 < \varepsilon$. Limitiamo l'apertura dell'intorno cercato in modo tale che:

$$1-\ln x > 0 \quad \to \quad -\ln x > -1 \quad \to \quad \ln x < 1 \quad \to \quad \ln x < \ln e \quad \to \quad x < e.$$

A questa condizione la frazione $\frac{1}{1-\ln x}$ è sempre positiva, quindi dobbiamo risolvere soltanto la disequazione:

$$\frac{1}{1-\ln x} < \varepsilon \quad \to \quad 1-\ln x > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad -\ln x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \to \quad \ln x < 1 - \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad x < e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

La disequazione ha soluzione per l'intorno destro di 0 (di apertura minore di e) $]0;\ e^{1-\frac{1}{\varepsilon}}[$, quindi il limite è verificato.

◆ Verifica del limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

ESERCIZIO GUIDA

Applicando la definizione, verifichiamo che $\lim_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$

Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno completo di 4 per ogni x del quale, con l'esclusione al più di 4, si ha:

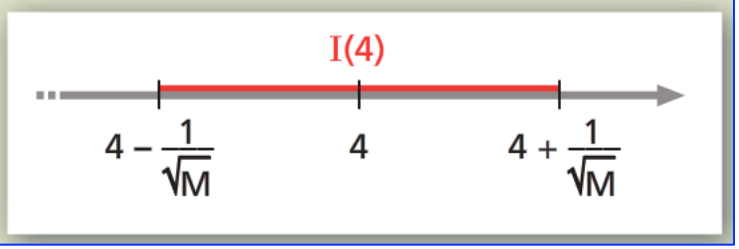
$$\frac{1}{(x-4)^2} > M.$$

Poiché $(x-4)^2 > 0$ per ogni $x \neq 4$, possiamo passare ai reciproci invertendo il verso della disuguaglianza:

$$(x-4)^2 < \frac{1}{M} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{M}} < x-4 < \frac{1}{\sqrt{M}} \quad \rightarrow \quad 4 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 4 + \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Escluso $x = 4$, l'intervallo $\left]4 - \frac{1}{\sqrt{M}}; 4 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right[$ è un intorno completo di 4 in cui il valore della funzione è maggiore di M, quindi il limite è verificato.

L'intorno è circolare e ha raggio $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.



Applicando la definizione, verificare il limite:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$$

b) Verifichiamo che, scelto $M>0$, esiste un intorno destro di 1 per ogni x del quale si ha $e^{\frac{1}{x-1}} > M$. Risolviamo la disequazione:

$$e^{\frac{1}{x-1}} > M; \quad \text{C.E. } x \neq 1.$$

Per definizione di logaritmo $e^{\ln M} = M$.

Poiché la funzione logaritmo in base e (maggiore di 1) è strettamente crescente, possiamo applicarla a entrambi i membri della disequazione e conservare il verso della disuguaglianza:

$$\ln e^{\frac{1}{x-1}} > \ln M.$$

Per la definizione di logaritmo $\ln e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1}$; pertanto otteniamo:

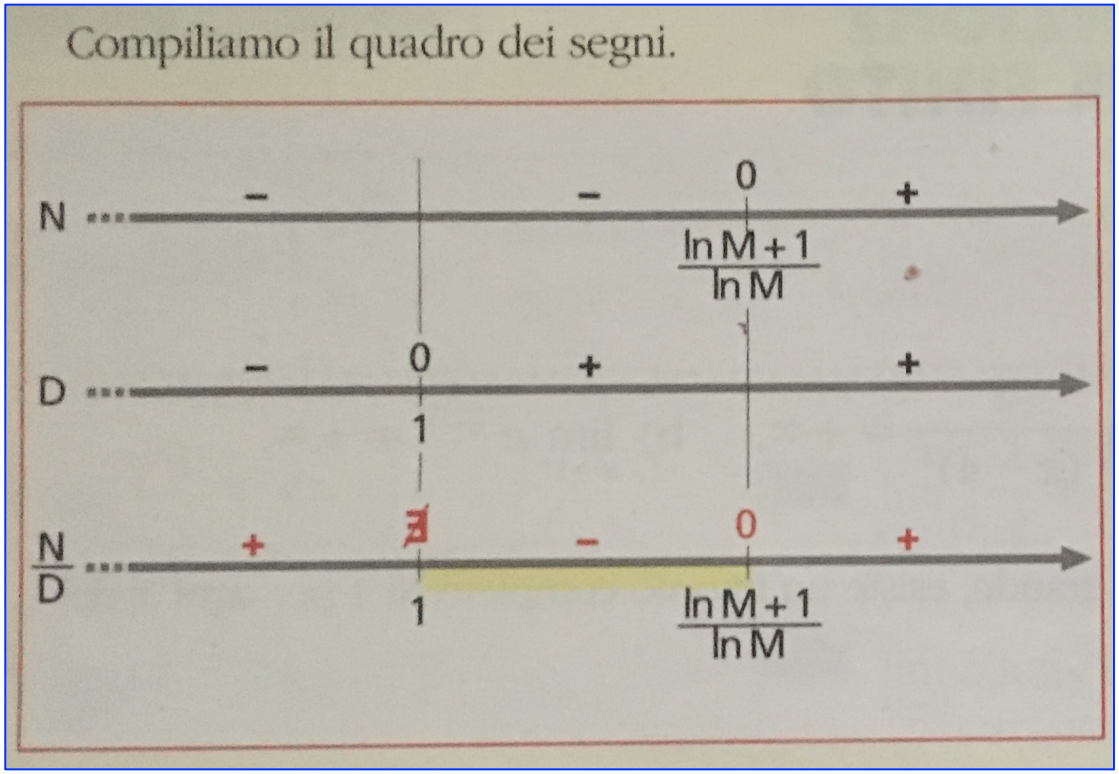
$$\frac{1}{x-1} > \ln M \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x-1} - \ln M > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1 - x\ln M + \ln M}{x-1} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x\ln M - \ln M - 1}{x-1} < 0$$

Segno del numeratore:

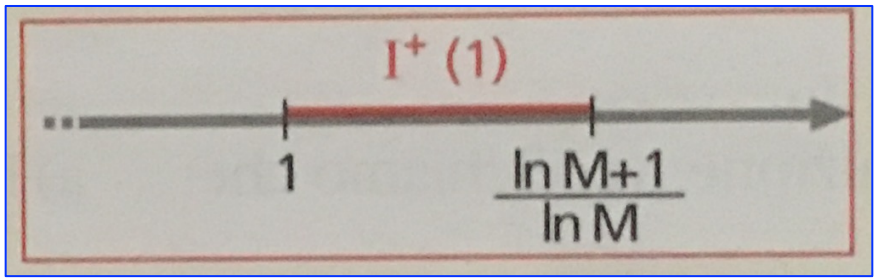
$$x\ln M - \ln M - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x\ln M > \ln M + 1 \quad \rightarrow \quad x > \frac{\ln M + 1}{\ln M}.$$

Segno del denominatore:

$$x - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad x > 1.$$



Le soluzioni della disequazioni sono i valori dell'intervallo]1;lnM+1/lnM[che è un intorno destro del punto 1, pertanto il limite è verificato.



ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che $\lim_{x \to 2} \frac{-2}{|x-2|} = -\infty$, mediante la definizione.

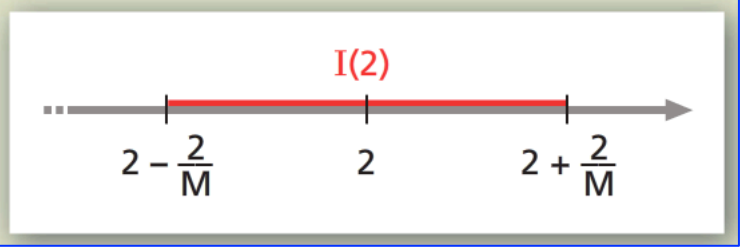
Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno completo di 2 per ogni x del quale, escluso al più 2, si ha $\frac{-2}{|x-2|} < -M$:

$$\frac{-2}{|x-2|} < -M \quad \rightarrow \quad \frac{2}{|x-2|} > M.$$

Poiché $|x-2| > 0$ per $x \neq 2$, possiamo passare ai reciproci invertendo il verso della disuguaglianza:

$$\frac{|x-2|}{2} < \frac{1}{M} \quad \rightarrow \quad -\frac{2}{M} < x-2 < \frac{2}{M} \quad \rightarrow \quad 2 - \frac{2}{M} < x < 2 + \frac{2}{M}.$$

Per ogni x, escluso $x = 2$, dell'intorno completo $\left]2 - \frac{2}{M}; 2 + \frac{2}{M}\right[$ di 2, il valore della funzione è minore di $-M$, quindi il limite è verificato. L'intorno è circolare e ha raggio $\delta = \frac{2}{M}$.



ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}}$ ha un asintoto verticale in $x = 1$

Deve essere $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}} = \infty$ (eventualmente anche soltanto il limite destro o il limite sinistro).

Verifichiamo che, scelto $M > 0$, arbitrariamente grande, esiste un intorno di 1 per ogni x del quale, escluso 1, si ha:

$$\left|\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\right| > M, \text{ cioè } \left|\ln\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{M}.$$

Poiché $\left|\ln\dfrac{1}{x}\right| = |\ln x^{-1}| = |-\ln x| = |\ln x|$, si ha:

$$|\ln x| < \frac{1}{M} \rightarrow -\frac{1}{M} < \ln x < \frac{1}{M} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln e^{-\frac{1}{M}} < \ln x < \ln e^{\frac{1}{M}} \rightarrow e^{-\frac{1}{M}} < x < e^{\frac{1}{M}}.$$

Essendo $1 = e^0$, possiamo affermare che l'intervallo delle soluzioni è un intorno completo di 1, quindi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln\dfrac{1}{x}} = \infty$ e $x = 1$ è asintoto verticale della funzione.

In alternativa possiamo risolvere separatamente le disequazioni

$$\frac{1}{\ln\frac{1}{x}} > M \text{ e } \frac{1}{\ln\frac{1}{x}} < -M,$$

ottenendo come soluzioni rispettivamente un intorno sinistro e un intorno destro di 1, e verificando così che $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

◆ Verifica del limite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$$

ESERCIZIO GUIDA

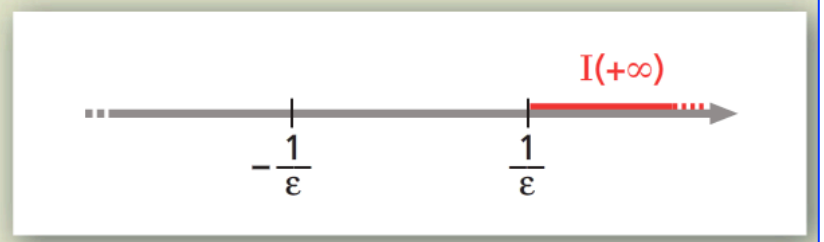
Applicando la definizione di limite, verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x} = 3$

Scelto $\varepsilon > 0$, dobbiamo verificare che esiste un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si ha: $\left|\frac{3x+1}{x} - 3\right| < \varepsilon$.

Risolviamo la disequazione, con $x \neq 0$:

$$\left|\frac{3x+1-3x}{x}\right| < \varepsilon \to \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \to |x| > \frac{1}{\varepsilon} \to$$

$$\to x < -\frac{1}{\varepsilon} \vee x > \frac{1}{\varepsilon}.$$



La disequazione è verificata in particolare per $x > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè per ogni x dell'intorno $\left]\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right[$ di $+\infty$: il limite è verificato.

ESERCIZIO GUIDA

Mediante la definizione, verifichiamo che $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$

Dobbiamo verificare che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di $-\infty$ per ogni x del quale si ha $|e^{2x} - 0| < \varepsilon$.
Risolviamo la disequazione:

$$|e^{2x}| < \varepsilon.$$

Poiché $e^{2x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, possiamo togliere il valore assoluto:

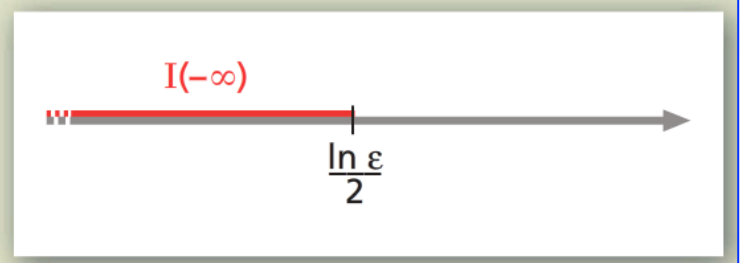
$$e^{2x} < \varepsilon.$$

Applichiamo il logaritmo in base e a entrambi i membri. Poiché la base è $e > 1$, se $a < b$ allora $\ln a < \ln b$, quindi:

$$\ln e^{2x} < \ln \varepsilon.$$

Per la definizione di logaritmo si ha che $\ln e^{2x} = 2x$, quindi:

$$2x < \ln \varepsilon \quad \rightarrow \quad x < \frac{\ln \varepsilon}{2}.$$



La disequazione è vera per ogni x dell'intervallo $\left]-\infty; \frac{\ln \varepsilon}{2}\right[$, che è un intorno di $-\infty$; quindi il limite è verificato.

ESERCIZIO GUIDA

Verifichiamo che la funzione $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$

Dobbiamo verificare che tende a 0 il limite della funzione per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ (o per entrambi). Poiché il dominio della funzione è $]1; 2[\cup]2; +\infty[$, la verifica si restringe al caso in cui $x \to +\infty$.

Fissato $\varepsilon > 0$, cerchiamo un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si abbia $\left| \dfrac{1}{\ln(x-1)} - 0 \right| < \varepsilon$.
Risolviamo la disequazione:

$$\left| \frac{1}{\ln(x-1)} \right| < \varepsilon \quad \to \quad |\ln(x-1)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Preso $x > 2$, possiamo eliminare il valore assoluto, essendo $\ln(x-1) > 0$:

$$\ln(x-1) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad \ln(x-1) > \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \to \quad x - 1 > e^{\frac{1}{\varepsilon}} \quad \to \quad x > 1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

$\left]1 + e^{\frac{1}{\varepsilon}}; +\infty\right[$ è l'intorno di $+\infty$ cercato, quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(x-1)} = 0$ e $y = 0$ è asintoto orizzontale della funzione.

◆ Verifica del limite:

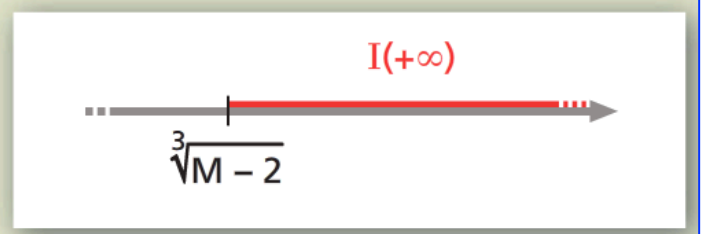
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Esercizio. Applicando la definizione, verificare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 + 2) = +\infty$$

Dobbiamo verificare che, scelto $M > 0$, esiste un intorno di $+\infty$ per ogni x del quale si ha $x^3 + 2 > M$.
Risolviamo la disequazione:

$$x^3 + 2 > M \quad \rightarrow \quad x^3 > M - 2 \quad \rightarrow \quad x > \sqrt[3]{M-2}\,.$$



L'insieme delle soluzioni è l'intorno di $+\infty$,
$]\sqrt[3]{M-2}; +\infty[$, quindi il limite è verificato.

Esercizio. Applicando la definizione, verificare il limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1+2x^2}{x}=-\infty$$

Scelto $M>0$, dobbiamo determinare un intorno di $-\infty$ per ogni x del quale si abbia $\frac{1+2x^2}{x}<-M$. Risolviamo la disequazione:

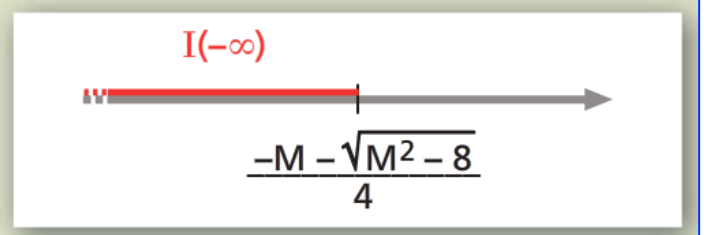
$$\frac{1+2x^2}{x}<-M \quad\rightarrow\quad \frac{1+2x^2}{x}+M<0 \quad\rightarrow\quad \frac{1+2x^2+Mx}{x}<0.$$

Poiché $x\to-\infty$, supponiamo $x<0$; quindi, per verificare la disequazione, basta che sia positivo il numeratore:

$$2x^2+Mx+1>0.$$

Nell'equazione associata, poiché M è scelto arbitrariamente grande, supponiamo $M^2>8$ e quindi $M^2-8>0$. Si ottiene quindi:

$$x<\frac{-M-\sqrt{M^2-8}}{4} \quad\vee\quad x>\frac{-M+\sqrt{M^2-8}}{4}.$$



Considerato $x<0$, abbiamo che per ogni x dell'intervallo $\left]-\infty;\frac{-M-\sqrt{M^2-8}}{4}\right[$, che è un intorno di $-\infty$, è vera la condizione iniziale, quindi il limite è verificato.

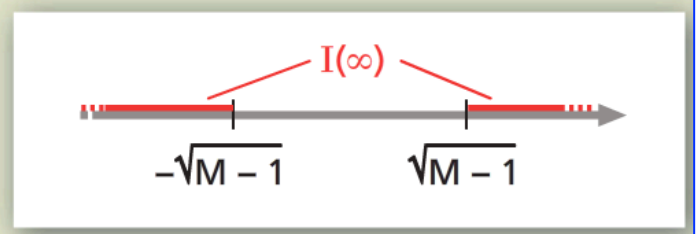
Esercizio. Applicando la definizione, verificare il limite:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2+1)=+\infty$$

Scelto $M>0$, cerchiamo un intorno di ∞, per ogni x del quale si abbia $x^2+1>M$. Risolviamo la disequazione, per la quale, supponendo $M>1$, otteniamo:

$$x^2+1>M \quad\rightarrow\quad x^2>M-1 \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x<-\sqrt{M-1}\ \vee\ x>\sqrt{M-1}.$$



Per ogni x dell'intorno $]-\infty;-\sqrt{M-1}[\cup]\sqrt{M-1};+\infty[$ di ∞ è vera la condizione $x^2+1>M$, quindi il limite è verificato.

◆ Primi teoremi sui limiti

Esercizio. Sapendo che:

$$\lim_{x\to -1}(4-9x^2)=-5$$

Verificare il teorema della permanenza del segno determinando un intorno di -1 nel quale la funzione $f(x)=4-9x^2$ abbia lo stesso segno del limite.

Poiché il limite è -5, cerchiamo un intorno di -1 in cui la funzione sia negativa:

$$4-9x^2<0 \quad \rightarrow \quad x<-\frac{2}{3} \ \text{v} \ x>\frac{2}{3}.$$

Ogni intervallo del tipo $\left]a;-\frac{2}{3}\right[$, con $a<-1$ $\left(\text{per esempio, } \left]-2;-\frac{2}{3}\right[\right)$, è un intorno di -1 in cui è vera la condizione posta, quindi il teorema è verificato.

ESERCIZIO GUIDA

Date le funzioni

$$h(x) = -x^2 + 4x - 3, \quad f(x) = 2x - 2, \quad g(x) = x^2 - 1,$$

e sapendo che

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = 0,$$

calcoliamo $\lim_{x \to 1} f(x)$ usando il teorema del confronto.

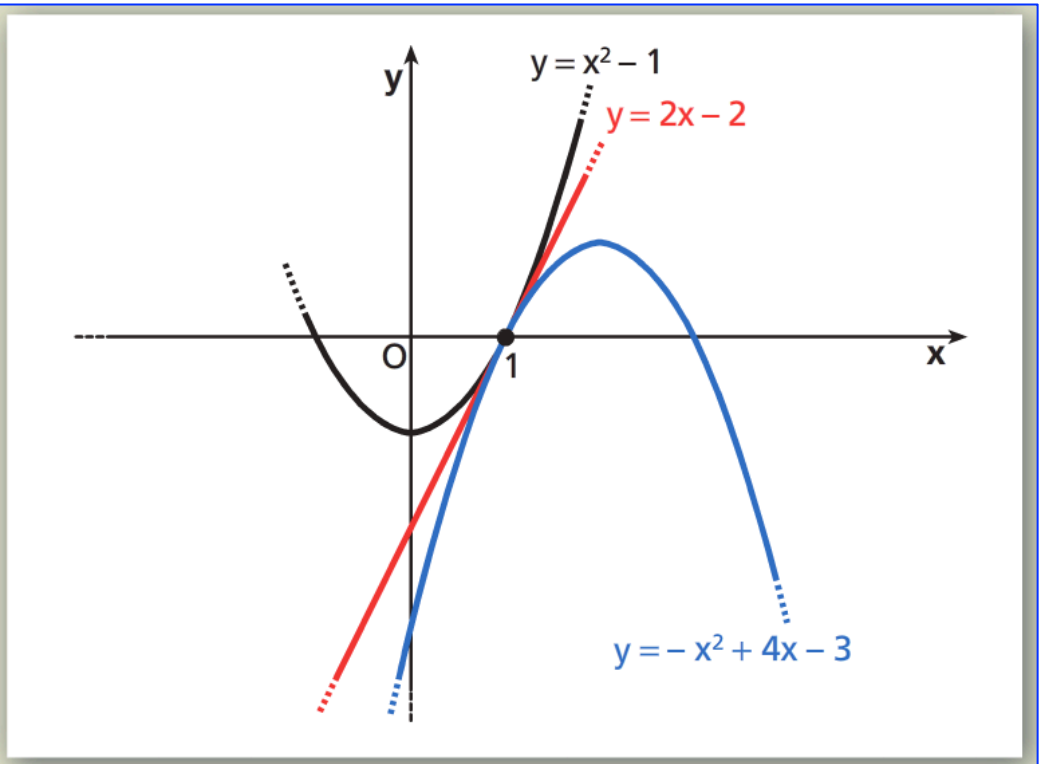
Per applicare il teorema del confronto dobbiamo verificare le sue ipotesi, ossia che si abbia $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ in un intorno di 1:

$$-x^2 + 4x - 3 \leq 2x - 2 \leq x^2 - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x - 3 \leq 2x - 2 \\ 2x - 2 \leq x^2 - 1 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \\ -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

Poiché le disequazioni del sistema sono verificate $\forall x \in \mathbb{R}$, allora è verificata anche la disuguaglianza:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo applicare il teorema del confronto e affermare che $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.